

RAPPORTEN EN MEDE- DEELINGEN VAN DEN RIJKSWATERSTAAT.

N^o. 29.

INHOUD:
WAARNEMINGEN OMTRENT DE SNEL-
HEIDSVERDEELING IN EEN VERTICAAL.

OPGEMAAKT DOOR DEN HOOFDINGENIEUR VAN
DEN RIJKSWATERSTAAT DR. IR. JOH. VAN VEEN.



RIKSUITGEVERIJ
DIENST VAN DE
NEDERLANDSCHE
STAATSCOURANT

I · 9 · 3 · 7

UITGEGEVEN DOOR HET MINISTERIE VAN WATERSTAAT.
ALGEMEENE LANDSDRUKKERIJ — 'S-GRAVENHAGE.

R.70.

veenoob2

DE „RAPPORTEN EN MEDEDELINGEN VAN DEN RIJKS-
STAAT" VERSCHIJNEN OP ONREGELMATIGE TIJDSTIPPEN EN
WORDEN SLECHTS, INDIEN DIT UITDRUKKELIJK IS AANGEGEVEN,
TEGEN BETALING ALGEMEEN VERKRIJGBAAR GESTELD. DE
INHOUD DER RAPPORTEN, MEDEDELINGEN, ENZ., BEHFT
GEHEEL VOOR REKENING VAN DE SCHRIJVERS.

440 0-06
B282

RAPPORTEN EN MEDEDEELINGEN VAN DEN RIKSWATERSTAAT.

No. 29.

INHOUD:
WAARNEMINGEN OMTRENT DE SNEL-
HEIDSVERDEELING IN EEN VERTICAAL.

OPGEMAAKT DOOR DEN HOOFDINGENIEUR VAN
DEN RIKSWATERSTAAT DR. IR. JOH. VAN VEEN.

UITGEGEVEN DOOR HET MINISTERIE
VAN WATERSTAAT.

WAARNEMINGEN OMTRENT DE SNELHEIDS- VERDEELING IN EEN VERTICAAL.

INHOUD: *Afleiding van eenvoudige formules voor verticaalkromme, bodemstroom en tangentele kracht. Bepaling correctietabel voor stokedrijvers.*

VERTICAALKROMMEN.

Blijkens recente en oudere metingen van den Rijkswaterstaat in onze groote rivieren, stroomen en kustzeeën, waarbij eenige duizenden zoogenaamde „verticaalkrommen” werden verzameld, die de snelheidsverdeling van de oppervlakte tot den bodem aangeven, komen de sterkste stroomen in normale gevallen aan of in de onmiddellijke nabijheid der oppervlakte voor, terwijl het snelheidsverval zoodanig is, dat de verticaalkrommen oogenblikkelijk doen denken aan parabolen van hoogere orde met toppen rakende aan den bodem.

Vele der hieronder te noemen onderzoekers of schrijvers ¹⁾, ²⁾ kwamen wat dit betreft tot andere gevolgtrekkingen. EIJTTELWEIN, PRONY en andere vroege onderzoekers namen een rechte lijnigen vorm aan; terwijl FUNK (1820) tot een logarithmische, GERSTNER (1832) tot een elliptische en BAZIN tot een parabolische lijn met horizontale as kwam. Ook HUMPHREYS en ABBOT (1861) vonden dit laatste bij een onderzoek in de Mississipi. HAGEN (1876), die BAZIN's meetgegevens gebruikte, bestreed deze opvatting en beval parabolen van den 2en graad aan met verticale assen, die niet samenvielen met de nullijn. HARDER (1878) nam twee bogen van elliptisch verloop, LAVALLE (1883) een zeer gecompliceerde parabool met verticale as, JASMUND (1897) een logarithmische lijn, HESSLE (1899) een ingewikkelde formule met drie constanten en CHRISTEN (1903) een nagenoeg even ingewikkelde hoogere-graadsparabool met verticale as. FORCHHEIMER (1931) acht daarentegen hoogere-graadsparabolen niet geschikt om verticaalkrommen voor te stellen en deze meening wordt door VAN RINSUM (1935) gedeeld. Schrijver dezes komt dit laatste onbegrijpelijk voor.

¹⁾ PH. FORCHHEIMER. Hydraulik 1931, blz. 172—180.

²⁾ ANTON VAN RINSUM. Die Abfluss in offenen natürl. Wasserläufen 1935.

Blijkbaar bestaat dus nog steeds verscheidenheid van inzicht in deze toch niet zeer moeilijke zaak. Gedeeltelijk kan de natuur zelf daaraan debet zijn, daar niet alle rivieren dezelfde verticaalkromme behoeven te bezitten, gedeeltelijk moet ook de schuld worden geschoven op onvoldoend zuivere meetinstrumenten. Daarbij komt, dat betrekkelijk weinig nieuw onderzoekingsmateriaal voorhanden is, zoodat VAN RINSUM (1935) bijvoorbeeld nog de meetgegevens van JASMUND (1893) gebruikt.

Intusschen zijn de genoemde verschillen van inzicht meer schijn dan wezen. Brengt men de verschillende benaderingsformules in teekening dan blijken hier en daar natuurlijk wel onderlinge afwijkingen, doch deze blijven betrekkelijk gering.

De moderne toestellen tot het meten van stroomen, als die van OTT of RAUSCHELBACH zijn behoorlijk nauwkeurig en er is eigenlijk weinig reden aanwezig, waarom de verschillende inzichten zich niet in hoofdzaken zouden vereenigen tot een algemeen aanvaardbare. Daarnaast kunnen dan voorloopig minder belangrijke meningsverschillen blijven bestaan, als bijvoorbeeld die betreffende de vraag of de snelste stroomen aan de oppervlakte dan wel een weinig daar beneden optreden. Sommige toestellen schijnen door overmatige golfslagturbulentie, of door andere oorzaken in de buurt der oppervlakte, den stroom niet geheel juist aan te geven, terwijl bij diepe oevers ¹⁾ en in laboratoriumgoten de snelste stroomen inderdaad beneden de oppervlakte schijnen voor te komen. De praktische beteekenis hiervan is natuurlijk niet groot.

Wat voor de practijk echter volstrekt niet uit het oog mag worden verloren is, dat de formule, die de meetgegevens moet benaderen *het liefst zoo eenvoudig mogelijk* moet zijn. Formules als die van HESSLE, HARDER, LAVALLE en CHRISTEN, waarbij vele verschillende grootheden in soms afschrikwekkend gecompliceerden vorm zijn opgenomen, geven mogelijk een goede benadering der meetcijfers, doch er mede te werken gaat bezwaarlijk.

Niettegenstaande FORCHHEIMER en andere Duitsche geleerden het gebruik van een hoogere-graadparabool afraden, werd nagegaan of de eenvoudigst denkbare parabool van hoogere orde:

$$v = a \sqrt[4]{h} \quad (1)$$

¹⁾ J. W. G. STIENEKER. Verslag van de stroomsnelheidsmetingen in 1875—1879 op den Rijn en zijne takken en op de Boven Maas.

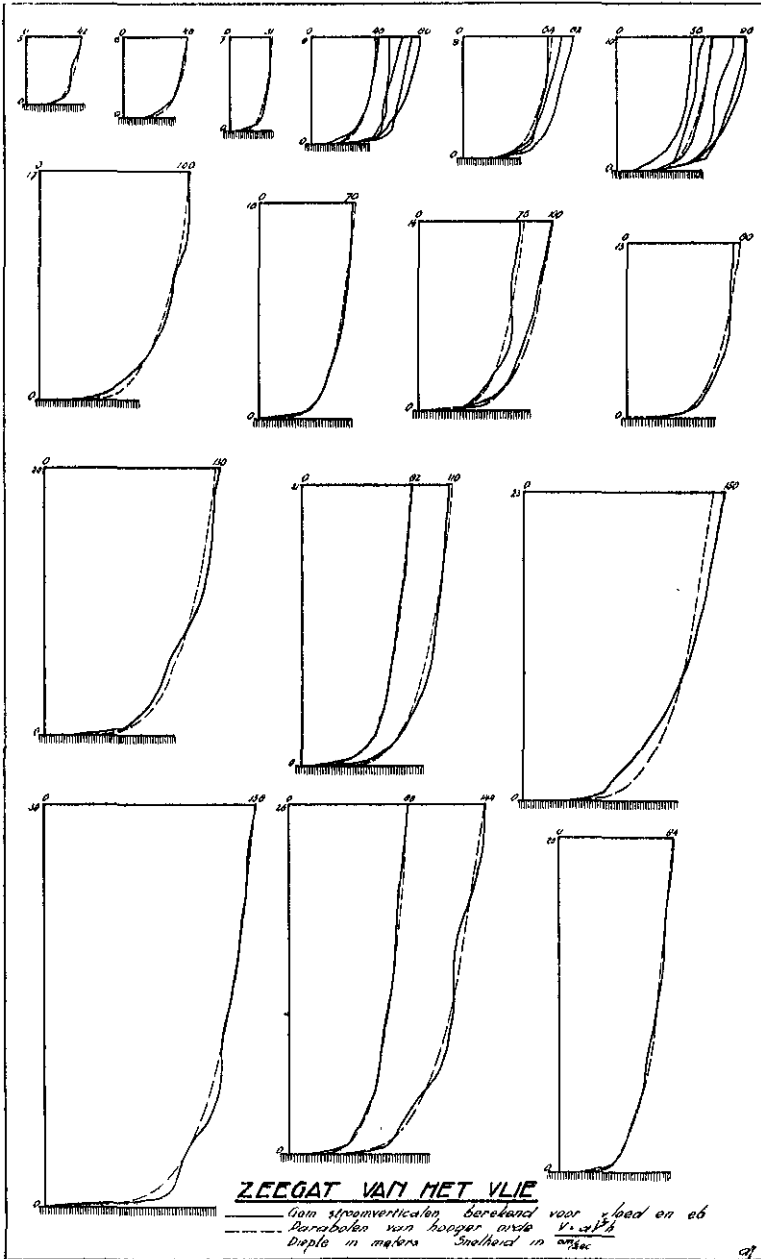


Fig. 1.

voldoende met de door den Rijkswaterstaat verzamelde uitgebreide reeks meetgegevens overeenstemde, om voor de practijk van nut te kunnen zijn.

In deze formule stelt v de snelheid voor op een hoogte h boven den bodem, a die op 1 meter boven den bodem en q een onbenoemd getal, dat voor verschillende stroomen bleek te liggen tusschen 5 en 9.

Figuur 1 geeft een aantal voorbeelden van verticaalkrommen weer, zooals zij aan boord van het meetschip „Oceaan” met behulp van zoo goed mogelijk gecontroleerde Ott-meters van 50 of 100 kg zwaarte werden bepaald in de jaren 1931-1935. Het vaartuig lag daarbij weliswaar voor slechts een anker, doch door den bijzonderen bouw gierde het in gewone gevallen nagenoeg niet. Dit kon doorlopend worden nagegaan met behulp van een registreerenden bodemstroommeter, welke gedurende de metingen steeds op den bodem werd geplaatst om daar de stroomsterkten op 0,15 m en 0,50 m boven den bodem continu te registreeren. Het toestel werd ook geleverd door de firma OTT.

Tevens werden in figuur 1 de parabolen $v = a \sqrt[q]{h}$ gestippeld geteekend, zoodat de mate van overeenstemming kan worden nagegaan. Niet alleen schijnt deze overeenstemming voor de practijk voldoende, het afwisselend binnen en buiten de zuivere parabool vallen der meetcijfers duidt er op, dat de stroomen gemiddeld inderdaad *volgens een regelmatige wet met den afstand boven den bodem schijnen toe te nemen.*

Er moet hierbij worden opgemerkt, dat elk der in fig. 1 gegeven krommen een gemiddelde is van ongeveer zes individueele verticaalkrommen, genomen in een punt tijdens het voornaamste deel van den vloed of van de eb. De afzonderlijke krommen vertoonen onrustiger vormen, doordat in elken stroom pulsaties aanwezig zijn ter grootte van ongeveer 20% der gemiddelde stroomsterkte. Door van ongeveer 6 verticaalkrommen het gemiddelde te nemen, worden de pulsatie-invloeden grotendeels geëlimineerd. Hetzelfde zou kunnen worden bereikt door in elk punt der verticaal gedurende betrekkelijk langen tijd (ten minste 3 à 5 minuten) te meten, doch in het tijgebied kost dit bij groote diepten in verband met de doorlopende wisseling der snelheden te veel tijd.

Naar het schijnt wordt door de nieuwere Duitsche formules als die van JASMUND en van VAN RINSUM geen betere benadering bereikt dan met de uiterst eenvoudige formule (1) wordt verkregen.

JASMUND geeft:

$$v = A + B \cdot \log. (h + c) \quad (2)$$

VAN RINSUM:

$$v = K_s \sqrt{H_i} + \mu \sqrt{(2Hh - h^2) i} \quad (3)$$

Beide formules werden met streep-lijnen voorgesteld in fig. 2, welke werd overgenomen uit VAN RINSUM's recent werkje. Tevens werd in fig. 2 de eenvoudige parabool $v = a \sqrt[3]{h}$ met een getrokken lijn geteekend. Er blijkt uit, dat de drie benaderingsformules weinig uiteenloopen en dat er uit practisch oogpunt *in het geheel geen reden bestaat een betere benadering van de vrij ingewikkelde formules (2) en (3) te verwachten dan van de dezerzijds gegeven formule (1).*

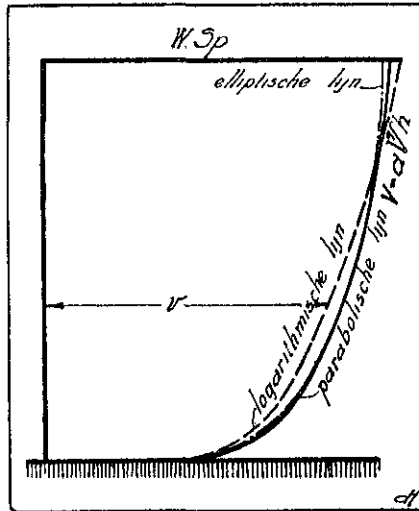


Fig. 2.

Tegen de benaderingen van JASMUND en van VAN RINSUM moet worden ingebracht, dat JASMUND's logarithmische lijn nabij de oppervlakte volgens onze meetervaring iets te schuin staat, terwijl VAN RINSUM's ellips aldair een loodrechte raaklijn heeft, hetgeen ook niet met de waarnemingen — althans met onze waarnemingen — overeenstemt. Dezerzijds bestaat de indruk, dat men voor de bepaling van benaderingsformules voor stroomverticalen te ver heeft gezocht.

VOLHEIDSFACITOR.

Uitgaande van het verband $v = a \sqrt[3]{h}$ kan men bodemstroomen, oppervlaktestroomen of gemiddelde stroomen gemakkelijk bepalen, zoodra één enkel punt der snelheidskromme bekend is en men den paraboograad van de rivier kent. Indien dus een der thans ten onzent in gebruik zijnde registreerende stroommeters, welke ruim 16 dagen onafhankelijk kunnen werken, ergens op een bepaalde hoogte boven den bodem is opgehangen, kan men de stroomen op elke hoogte boven den bodem

en dus ook de gemiddelde snelheden (afvoeren) binnen redelijke grenzen op eenvoudige wijze vinden.

Het voordeel der formule $v = a \sqrt[q]{h}$ komt hier bijzonder duidelijk aan het licht. Is het bij de andere formules zeer lastig of practisch onmogelijk de gemiddelde stroomen langs wiskundigen weg te berekenen, bij de hierboven genoemde parabool is dit heel gemakkelijk, omdat een *parabool*-oppervlak het $\frac{q}{q+1}$ de gedeelte is van den omschreven rechthoek.

Is dus de parabool van den vorm $v = a \sqrt[q]{h}$, zooals op zee of in de zeegeten het geval is, dan is het geharceerde oppervlak van fig. 3 gelijk aan $\frac{q}{q+1} \times$ opp. rechthoek. Dit volgt uit de integratie:

$$F = \int_0^H v dh = a \int_0^H h^{1/q} dh = \frac{q}{q+1} H v_{\max.}$$

In het vervolg zal de verhouding:

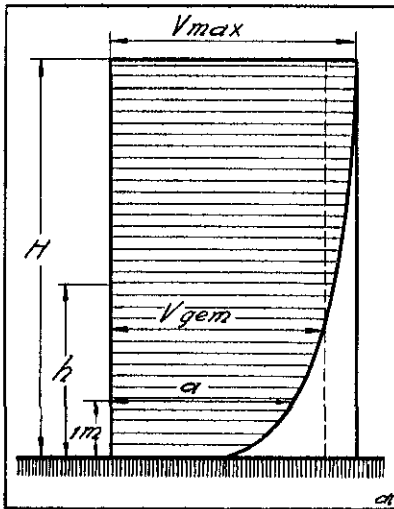


Fig. 3.

$$\gamma = \frac{q}{q+1} \quad (4)$$

de *volheidsfactor* der parabool genoemd worden. Voor een 2de graadsparabool is hij 0,67, voor een 5de graads 0,83, enz.

Hierbij valt nog onmiddellijk op te merken, dat de volheidsfactor γ ook de verhouding aangeeft tusschen den gemiddelden en den maximum stroom (oppervlaktestroom). Men heeft dus de betrekkingen:

$$\gamma = \frac{v_{\text{gemiddeld}}}{v_{\max.}} \quad (5)$$

$$v_{\text{gem.}} = \gamma a H^{1/q} \quad (6)$$

$$v_{\max.} = a H^{1/q} \quad (7)$$

De bepaling van de grootheid q kan geschieden als volgt:

Planimetreer het oppervlak van de uit de meetcijfers volgende stroomkromme (zie fig. 4) en zie welk deel dit is van den omschreven rechthoek. Daar een stroomkromme meestal geen vloeiend verloop vertoont, moet

punt C bepaald worden door het trekken van de lijn EC, welke de waarnemingskromme zoo goed mogelijk gestrekt volgt. Ten einde dit goed te doen wordt een geringe oefening vereischt. Gesteld dat de gevonden verhouding $\gamma = 0,87$ is,

dan is $q = \frac{0,87}{1-0,87} = 6,8$, zoodat de gezochte vergelijking luidt: $v = a \sqrt[6,8]{h}$

Door de wisselingen in de γ in een bepaald riviergedeelte na te gaan verkrijgt men den indruk dat deze wisselingen betrekkelijk gering zijn, indien men daarbij het watergedeelte nabij de oevers uitschakelt.

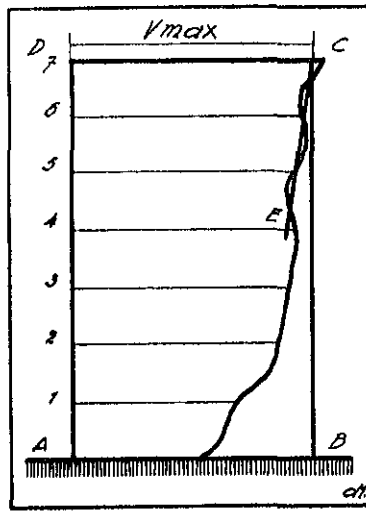


Fig. 4.

Uit de met grooten zorg uitgegeven resultaten der fraaie reeks metingen, welke in de jaren 1875—1879 door den Rijkswaterstaat met molentjes van Woltmann in onze groote rivieren bij verschillende afvoeren werden verricht (zie ¹⁾, blz. 4) en waarbij niet minder dan 532 *verticaalkrommen* werden overgelegd, kunnen de volgende volheidsfactoren worden afgeleid:

Waal bij Hulhuizen,	gemiddelde $\gamma = 0,86$,	middelb. afw. 0,019
Pannerdensch Kanaal,	„ „ = 0,88,	„ „ 0,021
Nederrijn bij Arnhem,	„ „ = 0,87,	„ „ 0,036
IJssel bij Groote Pleij,	„ „ = 0,89,	„ „ 0,022
Maas bij Baarsdonk,	„ „ = 0,90,	„ „ 0,018
„ „ Maasbracht,	„ „ = 0,82,	„ „ 0,077
„ „ Driel	„ „ = 0,90,	„ „ 0,030

De volheidsfactor varieerde voor den Rijn en diens takken dus minder dan voor de Maas. Behalve nabij de oevers, waarvoor de verticaalkrommen niet meegeteld werden, is de schommeling in de γ blijkens de lage cijfers voor de middelbare afwijking voor de Rijntakken niet bijzonder groot. Men zou deze volheidsfactor, die mogelijk met behulp van moderne meettoestellen thans een weinig nauwkeuriger zou kunnen worden bepaald volgens bovenstaande gegevens op 0,86 à 0,89 of op gemiddeld

$$\gamma = 0,87^5$$

kunnen stellen, waaruit dan volgt, dat de verticaalkrommen onzer genormaliseerde bovenrivieren door de parabolen $v = a \sqrt[6]{h}$ tot $v = a \sqrt[8]{h}$ of gemiddeld door

$$v = a \sqrt[7]{h} \quad (8)$$

kunnen worden voorgesteld. De Maas vertoonde in 1875—'79 nog een vrij wild karakter.

Het vervolg ¹⁾ der hierboven beschreven metingen, namelijk die van 1881, welke hoofdzakelijk op den IJssel en op het Pannerdensch Kanaal plaats vonden, leverde nog 139 *verticaalkrommen*. Nieuwe gezichtspunten kwamen daarbij echter niet voor. Waterstandsverschillen tengevolge van meerderen of minderen afvoer schenen weinig invloed op de grootte van den volheidsfactor te hebben.

Het bedrag $\gamma = 0,87^b$ is hetzelfde als door EHRENBERG (1924) in het Donaukanaal is gevonden (FORCHHEIMER, blz. 183) als quotient van de gemiddelde snelheid en de oppervlaktesnelheid (verg. (5)). Als middelbare afwijking hiervan ten opzichte van het gemiddelde vond EHRENBERG 1,8 %.

De overige door FORCHHEIMER op blz. 182 van zijn werk genoemde factoren $\gamma = \frac{V_{\text{gem.}}}{V_{\text{max.}}}$ voor de Drau, de Inn, de Weichsel en de Donau zijn belangrijk kleiner dan 0,875, hetgeen mogelijk in verband moet worden gebracht met den bijzonderen aard dezer rivieren. De metingen waaruit deze γ 's zijn afgeleid werden verricht in 1900—'01.

EEN 5° GRAADSPARABOOL VOOR ZEESTROOMEN.

Wat het tijgebied betreft spreekt het vanzelf, dat men het zoogenaamde brakwatergebied moet uitschakelen. Hier bezitten de verschillende lagen voortdurend een verschillend soortelijk gewicht, waardoor sterken invloed wordt uitgeoefend op den vorm der verticaalkrommen. Die bij eb zijn daardoor te „mager”, die bij vloed te „vol”, terwijl gedurende een groot deel van het getij de oppervlakte- en bodemstroom zelfs tegengestelde richtingen volgen (fig. 5).

Blijven de verschillen in soortelijk gewicht echter klein, bijvoorbeeld beneden 1/100, dan komen ook in het tijgebied regelmatige verticaalkrommen voor. Zulks is het geval in zee, in de Oosterschelde en Grevelingen en

¹⁾ J. W. G. STIENEKER. Verslag over de stroomsnelheidsmetingen in 1881 op den Boven-Rijn en zijn takken, 1883.

in de Noordelijke zeegaten en Waddenzee, op welke plaatsen met behulp van het Rijkswaterstaatsmeetschip „Oceaan” gedurende de jaren 1931—'35 ongeveer 1000 *verticaalkrommen* werden gemeten. In staat I werden een aantal γ 's gegeven, zooals zij werden afgeleid uit verticaalkrommen, die telkens als gemiddelden van 5 of 6 afzonderlijke tijdens het belangrijkste deel der eb of van den vloed in het zeegat van het Vlie werden bepaald.

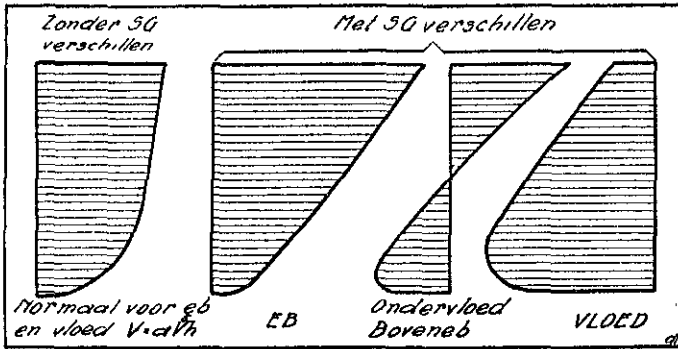


Fig. 5.

Hoewel hier mogelijk een geringen invloed van de diepte op den volheidsfactor kan worden bespeurd, in dien zin, dat deze laatste bij groote diepten kleiner is dan bij geringe diepten, is dit toch niet zoodanig, dat men daaromtrent reeds van een wetmatigheid zal mogen spreken.

STAAT I.

1933. Datum.	Verticaalkrommen in het Vlie.			[mm]
	Diepte.	Volheids- factor.	m	
12 Juni	30 m	0,83	— 0,01	0,01
27 Mei	26 „	0,82	— 0,02	0,04
19 Mei	26 „	0,81	— 0,03	0,09
5 Juli	25 „	0,81	— 0,03	0,09
11 Mei	23 „	0,78 ^d	— 0,06	0,36
30 Juni	21 „	0,86	+ 0,02	0,04
12 Mei	21 „	0,84	o	o
13 Juni	20 „	0,81	— 0,03	0,09
13 „	17 „	0,85	+ 0,01	0,01

1933. Datum.	Verticaalkrommen in het Vlie.			[mm]
	Diepte.	Volheids- factor.	m	
20 Mei	16 "	0,84	0	0
30 "	14 "	0,86	+ 0,02	0,04
24 Juni	14 "	0,83	— 0,01	0,01
16 Mei	12 "	0,87	+ 0,03	0,09
15 "	10 "	0,83	— 0,01	0,01
24 "	10 "	0,82	— 0,02	0,04
26 "	10 "	0,86	+ 0,02	0,04
29 "	10 "	0,82	— 0,02	0,04
28 Juni	10 "	0,83	— 0,01	0,01
1 Juli	10 m	0,85	+ 0,01	0,01
20 Juni	9 "	0,89	+ 0,05	0,25
15 Juli	9 "	0,82	— 0,02	0,04
19 "	9 "	0,84	0	0
8 Juni	8 "	0,85	+ 0,01	0,01
14 "	8 "	0,84	0	0
13 Juli	8 "	0,85	+ 0,01	0,01
17 "	8 "	0,93	+ 0,09	0,81
18 "	8 "	0,89	+ 0,05	0,25
25 "	8 "	0,86	+ 0,02	0,04
22 Juni	7 "	0,87	+ 0,03	0,09
26 Juli	6 "	0,83	— 0,01	0,01
25 Mei	5 "	0,81	— 0,03	0,09
		gem. 0,84		gem. 0,029

De gemiddelde volheidsfactor bleek in het Vlie te zijn 0,84, met een middelbare afwijking van 0,029. Daaruit volgt dat $q = \frac{0,84}{0,16} = 5,2$ is en dus de benaderende parabool (zie fig. 1)

$$v = a \sqrt[1.2]{h}.$$

In de zeeëngte der Hoofden (nabij Calais—Dover) werd uit een gemiddelde van ongeveer 300 *stroomverticalen*, gemeten in 1934/35, op 31 verschillende punten met diepten wisselend van 30 tot 70 meter een gemiddelde parabool gevonden, welke slechts weinig daarvan afweek, namelijk $v = a \sqrt[4.9]{h}$, zie fig. 6 en 7. De middelbare afwijking van de γ 's

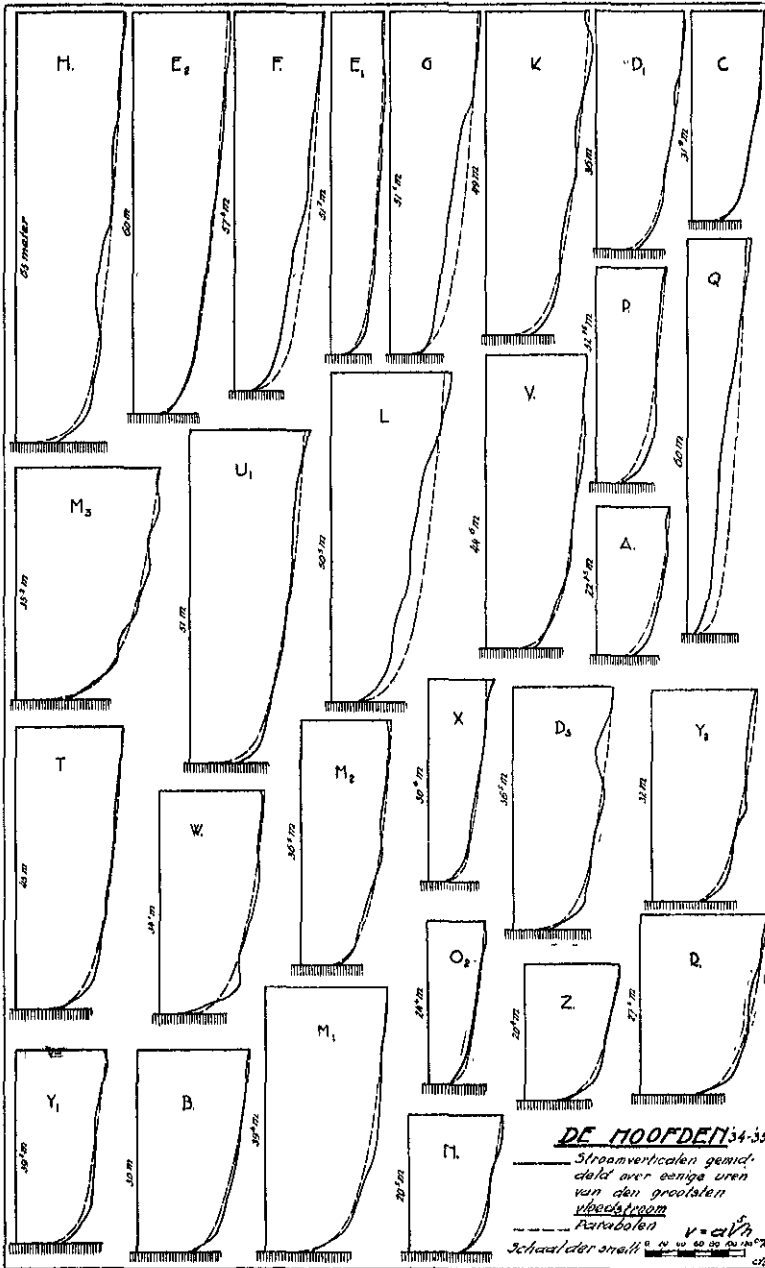


Fig. 6.

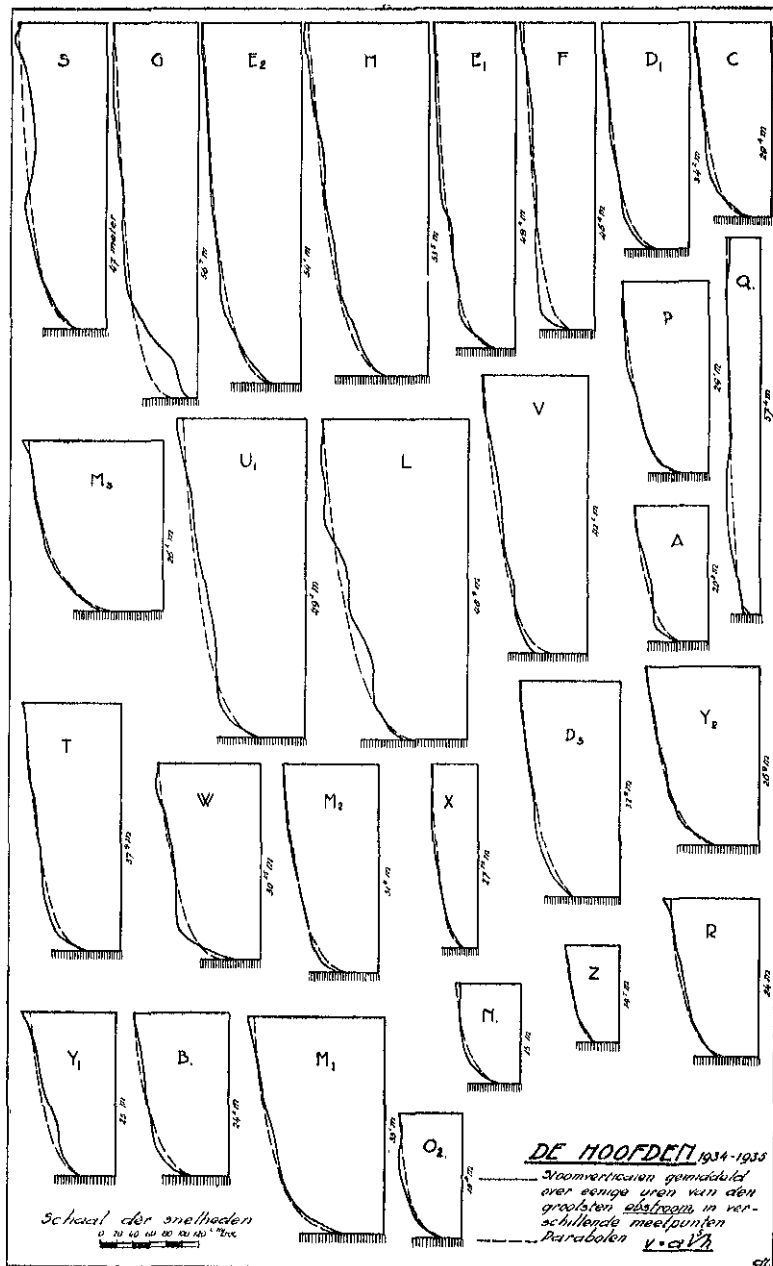


Fig. 7.

der in deze figuren geteekende parabolen was 0,043, dus vrij groot. Hier-voor bleek een geldige reden te bestaan. Beschouwt men namelijk de meest afwijkende γ 's, d.w.z. die welke gevonden werden voor de punten G, F, L en Q, dan blijkt dat de bodem bij deze meetpunten bijzonder sterk geaccidenteerd was. Schakelt men deze γ 's uit, dan wordt de middelbare afwijking ten opzichte van het gemiddelde zeer gering, namelijk 0,006 en het gemiddelde der γ 's : 0,838.

Hieruit volgt dezelfde parabool die ook voor het Vlie werd gevonden:

$$v = a \sqrt[3]{h} \quad (9)$$

De bijbehorende staat wordt hieronder gegeven.

Stroomverticalen in de Hoofden 1934—1935.

STAAT II.

Datum	Punt	Vloed γ	Ebb γ	m_v	$m_v^2 \times 10^{-6}$	m_e	$m_e^2 \times 10^{-6}$	Windrichting en windsnelheid (in m/sec.)
14 Juni '34 . .	K	0,830		— 0,008	64			Z.W. - 5
15 " '34 . .	N	0,830	0,827	— 0,008	64	— 0,011	121	N.O. - 5
25 " '34 . .	D ₁	0,840	0,840	+ 0,002	4	+ 0,002	4	Z.W. - 4
26 " '34 . .	E ₂	0,840	0,840	+ 0,002	4	+ 0,002	4	Z.W. - 5 à 10
27 " '34 . .	B	0,840	0,850	+ 0,002	4	+ 0,012	144	Z.W. - 5 à 12
28 " '34 . .	H	0,844	0,835	+ 0,006	36	— 0,003	9	Z.W. - 3 à 10
3 Juli '34 . .	O ₂	0,832	0,835	— 0,006	36	— 0,003	9	N.O. - 0 à 5
20 " '34 . .	M ₂	0,840	0,833	+ 0,002	4	— 0,005	25	N.W. - 4
23 " '34 . .	E ₁	0,850	0,840	+ 0,012	144	+ 0,002	4	Z.W. - 5. N - 5
25 " '34 . .	Z	0,840	0,832	+ 0,002	4	— 0,006	36	W.Z.W. - 5 à 8
28 " '34 . .	D ₂		0,830			— 0,008	64	Z.W. - 10 à 15
31 " '34 . .	M ₁	0,850	0,840	+ 0,012	144	+ 0,002	4	Z.Z.W. - 5 à 10
1 Aug. '34 . .	I	0,840	0,837	+ 0,002	4	— 0,001	1	Z.W. - 7
7 " '34 . .	C	0,840	0,834	+ 0,002	4	— 0,004	16	N.W. - 5
9 " '34 . .	D ₃	0,830	0,844	— 0,008	64	+ 0,006	36	Z.W. - 6
10 " '34 . .	IJ ₂	0,840	0,830	+ 0,002	4	— 0,008	64	Z.W. - 10 à 15
4 Juni '35 . .	V	0,838	0,843	0	0	+ 0,005	25	weinig
19 Juli '35 . .	M ₃	0,830	0,840	— 0,008	64	+ 0,002	4	Z.W. - 6 à 10
21 Aug. '35 . .	P	0,833	0,840	— 0,005	25	+ 0,002	4	O.Z.O. - 0 à 4
22 " '35 . .	A	0,836	0,830	— 0,002	4	— 0,008	64	Z.Z.W. - 0 à 3
23 " '35 . .	X	0,845	0,830	+ 0,007	49	— 0,008	64	Z.W. - 0 à 3

Datum.	Punt	Vloed γ	Eb γ	m_v	$m_v^2 \times 10^{-6}$	m_e	$m_e^2 \times 10^{-6}$	Windrichting en windsnelheid (in m/sec.)
26 Aug. '35 . .	IJ ₁	0,838	0,838	0	0	0	0	N. - 5
28 „ '35 . .	R	0,840	0,835	+ 0,002	4	- 0,003	9	Z. - 3 à 5
29 „ '35 . .	U ₁	0,838	0,840	0	0	+ 0,002	4	W.Z.W. - 5 à 8
30 „ '35 . .	W	0,850	0,850	+ 0,012	144	+ 0,012	144	Z.Z.W. - 5 à 10
2 Sept. '35 . .	S		0,830			- 0,008	64	Z.W. - 5 à 15
3 „ '35 . .	T	0,840	0,830	+ 0,002	4	- 0,008	64	Z.W. - 3 à 5
Gemiddelde waarden		0,839	0,837		878		987	

$$\gamma_{\text{gem.}} = 0,838.$$

$$m = \sqrt{\frac{0,000878 + 0,000987}{51}} = \sqrt{0,000036} = 0,006$$

De windinvloed op den vorm der parabolen en op de grootte der γ 's is blijkens bovenstaanden staat niet merkbaar geweest.

In 1936 werden op een plaats nabij Dover met ± 35 m diepte en een tamelijk vlakken bodem gedurende 35 achtereenvolgende getijden 392 *verticaalkrommen* verzameld. Zij werden weder voor elke eb en vloedperiode groepsgewijs gemiddeld. Deze gemiddelden worden in fig. 8 aangetroffen. Gevonden werd:

$$\gamma_{\text{gem.}} = 0,845$$

$$q = 5,45$$

dus

$$v = a \sqrt[5]{h} \quad (10)$$

terwijl de middelbare afwijking in de γ 's = 0,011 was.

De volgende staat geeft de afzonderlijke grootheden en de berekening der gemiddelden weer.

De groote afwijking op 15 Juni is toe te schrijven aan storm, waardoor niet nauwkeurig gemeten kon worden. Het meetvaartuig slipte daarbij eenige honderden meters op zijn anker.

In de Hoofden en in het Vlie bleken dus verticaalkrommen geldig, welke uitstekend door de formule

$$v = a \sqrt[5]{h} \quad (11)$$

te benaderen bleken ($q = 5,2 \text{ à } 5,4$).

Ook elders in zee of in onze zeegaten werden soortgelijke parabolen door ons gevonden. Tamelijk goed is ook de overeenstemming van deze formule met de meetgegevens van TUTEIN NOLTHENIUS en BERNELOT MOENS ¹⁾ in de Noordzee (1880—1882). Hieruit is namelijk volgens deze onderzoekers af te leiden, dat γ ongeveer = 0,8 moet zijn, terwijl formule 11 geeft $\gamma = 0,84$.

De conclusie, dat op zee de stroomverticalen door een 5de graads parabool kunnen worden voorgesteld (of dit een 5de graads of een 5,3de graads parabool is maakt betrekkelijk weinig verschil) houdt in, dat de gemiddelde stroomen eener verticaal overeenkomen met die, welke op ongeveer 0,4 *b* boven den zeebodem worden gemeten. Bij oneffen bodems (enorme zandribbels, rotsen) wordt, zooals reeds werd opgemerkt, de verticaalkromme in meer of mindere mate gestoord.

BODEMSTROOMEN.

Voor breede rivieren met betrekkelijk geringe diepte, zooals de onze — meestal stelt men zich onze rivieren in verhouding tot de breedte als veel te diep voor; men stelle zich een rivier als de Waal voor als een goot van 1 meter breedte met ± 2 cm water daarin — is de gemiddelde snelheid in een verticaal voor te stellen door de bekende formule

$$v_{\text{gem.}} = c_1 H^n i^p \quad (12)$$

waarin c_1 een zoogenaamde constante, H de diepte, i het verhang en n en p onbenoemde getallen voorstellen.

¹⁾ H. BERNELOT MOENS en R. P. J. TUTEIN NOLTHENIUS. Verslag van de waarnemingen omtrent de stroomen langs de Nederlandsche kust, 1880—1882.

Tevens geldt voor dezelfde verticaal de parabooolformule

$$v_{\text{gem.}} = \gamma a H^{1/4} \quad (13)$$

zoodat de bodemstroom op 1 meter boven den bodem door

$$a = \frac{c_1}{\gamma} i^p H^{n-1/4} \quad (14)$$

kan worden weergegeven.

Bodemstroomen blijken dus niet alleen evenredig met een bepaalde macht van het verhang, doch ook met een *bepaalde macht van de diepte*, terwijl de volheidsfactor γ natuurlijk mede een rol speelt.

Blijkens vele nieuwere onderzoekers moet n ongeveer $\frac{2}{3}$ zijn en p ongeveer $\frac{1}{2}$, zooals uit onderstaanden staat volgt (zie FORCHHEIMER: Hydraulik, 1931, blz. 140 e.v.).

	Constante c_1	n	p	
DE CHÉZY (1775)	—	0,5	0,5	
EYTELWEIN (1801)	50,9	0,5	0,5	
COURTOIS (1850)	50	0,5	0,5	
HUMPHREYS and ABBOT (1861)	5 à 5,7	0,5	0,25	
GAUCKLER (1868)	c_1	1,33	1	voor $i > 0,0007$
"	c_3	0,67	0,5	voor $i < 0,0007$
MANNING (1890)	58,82	0,67	0,5	
CHRISTEN (1904)	14	0,33	0,33	
HERMANEK (1905)	30,7	1,0	0,5	voor $h < 1,50$ m
"	44,5	0,6	0,5	voor $h > 6$ m
"	34	0,75	0,5	voor h daartusschen
MATAKIEWICZ (1905)	33,922	0,923	0,48	
" (1927)	35,4	0,7	0,493 + 10i	
WINKEL (1923)	185-210i ^{0,07}	0,71	0,57	
FORCHHEIMER (1923)	24 à 30	0,7	0,5	
" (1923)	91,1	0,6	0,5	voor cementbodem
" (1923)	72	0,6	0,5	" houten bodem
" (1923)	62	0,73	0,5	" kiezelbodem
" (1923)	58	0,92	0,5	" schoone aarde
" (1923)	48	1,12	0,5	" oorspr. aarden bed

De gebruikelijke formule van DE CHÉZY $v = c \sqrt{Hi}$ zou dus waarschijnlijk beter kunnen luiden $v = c_1 H^{2/3} i^{1/2}$, doch de ervaring leert

dat de formule van DE CHÉZY geen slechte resultaten geeft mits men de c uit de stroommetingen zelf bepaalt.

De „constante” der formule zou men de „verzamelbak” van alle minder juiste veronderstellingen of weglatingen kunnen noemen. Het is onmogelijk om alle invloed-uitoefnende factoren op de juiste wijze in een formule onder te brengen en men moet dus aan de „constante” een nauwkeurig onderzoek in natura wijden. Bepaalt men deze volgens eigen waarnemingen, dan weet men binnen welke grenzen van nauwkeurigheid men werkt; doet men dit niet, doch bepaalt men zonder toetsing zijn keuze uit een der vele beschikbare formules, dan zal men een groote onzekerheid in de berekeningen moeten aannemen, omdat per slot van rekening elke stroom en elke bodem verschillend is. Met eenvoudige formules bereikt men soms voor de bepaling van afvoeren een even groote mate van nauwkeurigheid als met zeer ingewikkelde, omdat eventueele fouten in de exponenten toch in de constante worden verdisconteerd. Een exponent, die $\frac{1}{2}$ genomen wordt en eigenlijk beter $\frac{2}{3}$ moest zijn is dan ook geen groot bezwaar.

Voor ons doel, het bepalen van de grootte der bodemstroomen, is echter wel degelijk van belang of $n = \frac{1}{2}$ (DE CHÉZY) of $n = \frac{2}{3}$ dan wel nog hooger moet worden aangenomen.

Geval 1. Voor $n = \frac{1}{2}$ vindt men:

bij $q = 2$ (gewone parabolen) a evenredig met H^0 ($= 1$)

bij $q = 5$ (zeegaten en Noordzee) a evenredig met $H^{0.3}$

bij $q = 7$ (grootte rivieren) a evenredig met $H^{0.36}$

Dat wil zeggen: Uitgaande van de veronderstelling dat de invloed van de diepte op den afvoer uitgedrukt wordt door de exponent $n = \frac{1}{2}$ (DE CHÉZY) moeten de bodemstroomen op 1 m boven den bodem zijn:

voor de Noordzee en zeegaten zonder verschillen in s.g.: $a = \frac{c}{\gamma} i^{\frac{1}{2}} H^{0.3}$

voor de grootte rivieren $a = \frac{c}{\gamma} i^{\frac{1}{2}} H^{0.36}$

Slechts voor het geval dat de stroomverticalen gewone 2de graads parabolen waren, zou de diepte geen invloed op de bodemstroomen hebben.

Geval 2. Voor $n = \frac{2}{3}$ is:

voor de Noordzee en zeegaten zonder verschillen in s.g.: $a = \frac{c_1}{\gamma} i^{\frac{1}{2}} H^{0.47}$

voor de groote rivieren ($q = 7$) $a = \frac{c_1}{\gamma} i^{\frac{1}{2}} H^{0.52}$

Dat wil zeggen: De nieuwere onderzoekingen schijnen uit te wijzen dat de bodemstroomen op 1 m boven den bodem ongeveer evenredig moeten zijn met de wortel uit de diepte, dus

$$a = \frac{c_1}{\gamma} \sqrt{Hi} \quad (15)$$

Opmerking.

Deze formule berust op metingen, niet op theorie. Immers van den eenen kant werd de exponent $n = \frac{2}{3}$ afgeleid uit onderzoekingen, van den anderen kant werd de paraboolformule bepaald uit waarnemingen der stroomverticalen. De c_1 in deze formule komt overeen met die van MANNING (± 60).

In het algemeen leert de waarneming, dat bij groote afvoeren, d.w.z. bij groote H 's, het vervoer van zand grooter is dan in normale omstandigheden. Dit duidt inderdaad op toenemende bodemsnelheden met de toename der diepte, omdat de verhangen en γ 's bij groote afvoeren weinig veranderen.

TANGENTIEELE KRACHT.

Vele schrijvers over verticaalkrommen gaan uit van de veronderstelling, dat er een bepaalde bodemstroom v_b bestaat en dat de formule voor de verticaalkromme dus in het algemeen luidt

$$v = v_b + v_1$$

waarin v_1 dan een bepaalde logarithmische, parabolische of elliptische wet volgt. Zie bv. de formule van VAN RINSUM. Het kan gemakkelijk worden ingezien dat dit theoretisch minder juist is.

Gesteld dat de bodem volkomen vlak was, dan zou toch de alleronderste laag water ter dikte eener fractie van een mm in rust verkeeren, omdat deze door de adhesie aan den bodem gekleefd zou zijn. De volgende laag zou een geringe bewegingsmogelijkheid bezitten, de daaropvolgende iets meer, enz. Geenszins zou de snelheidskromme ergens den bodem snijden.

Het eigenlijke *raakpunt aan den bodem moet daarom in het nulpunt der figuur vallen.*

Eenzelfde geval vindt men ook bij een bewegend schip. Volgens Deutsche onderzoekingen ¹⁾ sluit de snelheidskromme zich nauw aan den

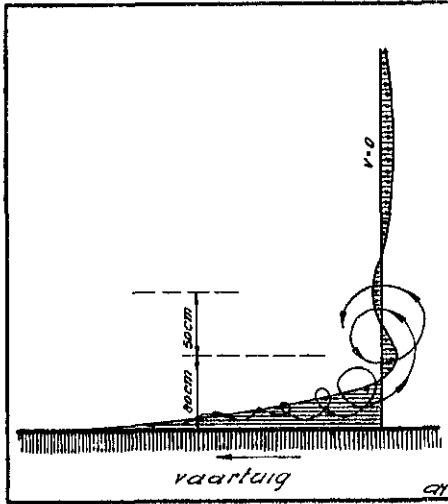


Fig. 9.

scheepswand aan, doordat de inwendige wrijving van het water en vooral ook de turbulentie de lagen op grootere afstanden meesleurt. Op een bepaalden afstand schijnt het terugstroomend water eener wervelstraat een bijzonderen kop aan de snelheidskromme te geven (zie fig. 9). Belangrijker is echter de opmerking dat de snelheidslijn niet de scheepswand snijdt, doch er zich bij aansluit, ongeveer op de wijze als parabolen van hoogere orde tegen een raaklijn in den top aansluiten. Leunend over de reeling van een zich ten opzichte van het water bewegend

schip kan men zich daarvan gemakkelijk overtuigen.

In analogie met een bewegend schip kan men zich ook bij een rivier het water in rust denken en den bodem bewegend met een bepaalde constante snelheid AD (zie fig. 10). Door de adhesie aan den bodem wordt de onderste waterlaag meegevoerd met deze relatieve snelheid AD , terwijl daarboven de lagen meegesleurd worden door de inwendige wrijving (viscositeit) en door de turbulentie. Deze laatste hangt o.a. af van de ruwheid van den bodem.

Een scheepswand is slechts betrekkelijk kort, zoodat wrijving en turbulentie weinig tijd hebben breede waterlagen mee te sleuren. Indien de wand oneindig lang was en deze oneindig langen tijd door het water zou worden getrokken zou men een meer volkomen analogie met een rivierbodem waarover water stroomt hebben en zou een snelheidskromme worden aangetroffen, welke ongeveer met die van fig. 10 overeenkomt.

¹⁾ DAHLMANN, HOPPE, SCHÄPER. Messung der Wassergeschwindigkeiten neben der Schiffswand. Werft, Reederei, Hafen, 7 Sept. 1926.

Immers is het plausibel dat het meesleu-
 ringsverschijnsel zoodanig geschiedt, dat
 de invloed van een wand of bodem op
 verder weg gelegen lagen kleiner is
 dan op dichterbij gelegen lagen. Stel,
 om de gedachte te bepalen, dat de snel-
 heidstoename op 100 m afstand van een
 bodem of wand ten opzichte van dezen
 bodem of wand nog slechts zeer gering
 is, dan zou de snelheid AD dus onge-
 veer $a \sqrt[5]{100}$ of $\pm 2,5 a$ moeten zijn.
 Kende men deze fictieve snelheid AD,
 dan zou het geharceerde deel van fig. 10,
 een maat voor den invloed van den uit- en in-
 wendigen weerstand voorstellende, te meten
 zijn.

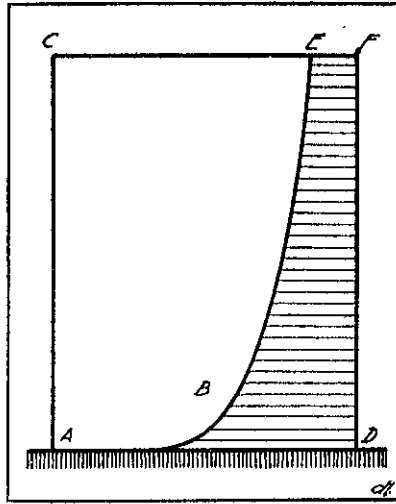


Fig. 10.

De invloed van de wrijving der oevers is soms bij afvoerbepalingen
 goed na te gaan. Bij breede bakvormige profielen verloopt de stroom
 ongeveer volgens eenzelfde parabolische wet tusschen den oever en een
 lijn op een bepaalden betrekkelijk grooten afstand daarvan.

*Welke wrijvingswet kan bij de waargenomen parabolische snelheidsverdeling
 worden aangenomen?*

De krachtenvergelijking luidt

$$\frac{dT_h}{dh} = - \rho g i \quad (16)$$

Hierin is T_h de tangencieele kracht tusschen twee lagen, h de hoogte
 der laag boven den bodem, ρ het soortelijk gewicht, g de versnelling der
 zwaartekracht en i het verhang.

Geïntegreerd geeft (16)

$$T_h = \rho g i (H - h) \quad (17)$$

Stel nu de wrijvingskracht T_h evenredig met het kwadraat van het
 snelheidsverval $\frac{dv}{dh}$ en bovendien met een correctie $f(h, H)$, dan is

$$T_h = \left(\frac{dv}{dh} \right)^2 f(h, H) = \rho g i (H - h),$$

$\frac{dv}{dh} \propto f$

$\frac{dv}{dh} \propto \frac{dv}{dh} f(h, H)$

waarin
$$\frac{dv}{dh} = \frac{a}{q} h^{1/q-1} = \frac{c_1 \sqrt{H}}{\gamma q} h^{1/q-1} \quad (\text{zie } 15)$$

gesubstitueerd kan worden.

Dit doende wordt gevonden

$$f(h, H) = \frac{\gamma^2 \rho g q^2}{c_1^2} \frac{H-h}{H} h^{2-1/q}$$

zoodat
$$T_h = \mu \frac{H-h}{H} \left(\frac{dv}{dh} h^{1-1/q} \right)^2 \text{ is,} \quad (18)$$

waarin
$$\mu = \frac{\rho g \gamma^2 q^2}{c_1^2} \quad (19)$$

Deze kracht T_h kan men desgewenscht superponeeren met de windkracht en met de krachten, optredende door de verschillen in soortelijk gewicht van verschillende waterlagen.

Voor $h = H$ dus aan de oppervlakte, wordt $T_h = 0$

Voor $h = 0$, dus aan den bodem, wordt $\frac{dv}{dh} = \infty$ en $T_h = \rho g i H$.

CORRECTIETABEL VOOR STROOMDRIJVINGEN.

Bij stroomdrijvingen met stokdrijvers reiken deze laatste nimmer tot den bodem; gewoonlijk zal men een bodemlaag van $\pm 10\%$ der profielsinhoud op deze wijze niet meten. Daar de snelheden in deze laag kleiner zijn dan die der overige 90% meet men dus steeds te groote afvoeren.

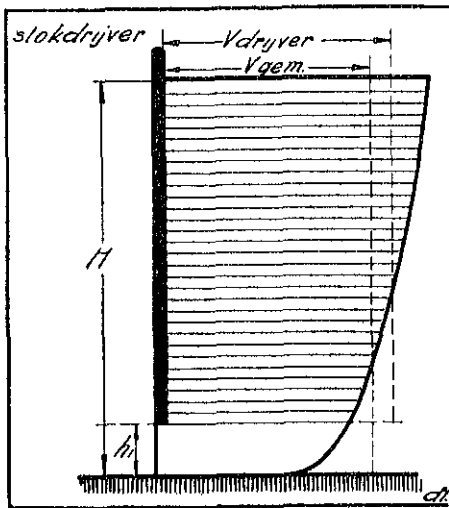


Fig. 11.

Uitgaande van de paraboolformule

$$v = a \sqrt[1]{h}$$

vindt men voor de gemiddelde snelheid der verticaal tusschen h_1 en H (zie fig. 11).

$$V_{drijver} = \frac{a}{H-h_1} \int_{h_1}^H \sqrt[1]{h} dh = \frac{a}{\gamma} \frac{H^{1/q+1} - h_1^{1/q+1}}{H-h_1}$$

De werkelijke, niet met behulp van een stokdrijver te meten gemiddelde snelheid is:

$$v_{\text{gem.}} = a\gamma H^{1/q}$$

De correctie bedraagt dus:

$$\alpha = \frac{v_{\text{gem.}}}{v_{\text{drijver}}} = \frac{(H - h_1) H^{1/q}}{H^{1/q+1} - h_1^{1/q+1}}$$

Noemt men $\frac{\text{drijverlengte}}{\text{diepte}} = r$, dan is de correctiefactor

$$\alpha = \frac{r}{1 - (1 - r)^{1/q}} \quad (20)$$

Hieronder volgt een staat dezer correctiefactoren voor $q = 5$ t/m $q = 10$.

Verhouding drijverlengte : diepte = r	Berekende correctiefactor volgens $v = a\sqrt[q]{h}$ voor:					
	q = 5	q = 6	q = 7	q = 8	q = 9	q = 10
0,75	0,92532	0,93565	0,94349	0,94963	0,95457	0,95860
0,80	0,93563	0,94445	0,95116	0,95642	0,96067	0,96417
0,85	0,94722	0,95435	0,95979	0,96408	0,96755	0,97041
0,90	0,96150	0,96580	0,96980	0,97296	0,97553	0,97766
0,95	0,97682	0,97973	0,98201	0,98383	0,98532	0,98656

In het algemeen zal men dus de afvoeren 3 à 5% te hoog vinden, indien men bovengenoemde correctiefactoren niet toepast.

Het verband tusschen den oppervlaktestroom en den gemiddelden stroom wordt gegeven in de volgende tabel:

	q = 5	q = 6	q = 7	q = 8	q = 9	q = 10
$\frac{v_{\text{gem.}}}{v_{\text{opp.}}} =$	0,83333	0,85714	0,87500	0,88889	0,90000	0,90909
$\frac{v_{\text{opp.}}}{v_{\text{gem.}}} =$	1,20000	1,16667	1,14286	1,12500	1,11111	1,10000

Tenslotte moet nog de opmerking worden gemaakt, dat men de kritische snelheden voor de zandverplaatsingen niet zonder meer dient te geven, zooals doorgaans geschiedt, doch dat daarbij de hoogte boven den bodem moet worden aangegeven. Het begrip „bodemsnelheid” alleen is geen bepaald begrip.

LA COURBE DES VITESSES DANS UNE LIGNE VERTICALE D'UN COURS D'EAU.

TELLES QU'ON LES A MESURÉES A BORD DU NAVIRE-EXPLORATEUR DU RIJKSWATERSTAAT L'„OCEAAN”.

CONTENU: Déduction de simples formules pour des diagrammes de courant dans une ligne verticale d'un cours d'eau; courants de fond et forces tangentielles. Tables de correction pour des flotteurs.

DIAGRAMMES DE COURANTS POUR DES VERTICALES.

D'après des mesures anciennes et récentes faites par le Rijkswaterstaat les diagrammes pour les courants dans une verticale entre la surface de l'eau et le fond montrent les caractéristiques suivantes: les courants les plus forts se présentent à la surface, tandis que la gradation grandit dans la direction du fond, de manière que les diagrammes ressemblent à des paraboles à axes verticaux, dont les sommets touchent le fond dans le zéro de la figure.

La plupart des explorateurs ont tiré des conclusions différentes, quelques-uns ont trouvé des formes rectilignes ou logarithmiques, d'autres des formes elliptiques ou même des paraboles à axes horizontaux, etc. Les auteurs allemands qui ont traité ce sujet récemment comme FORCHHEIMER (1931) et VAN RINSUM (1935) soutiennent que des formes paraboliques à axes verticaux ne se prêtent pas à représenter approximativement les diagrammes de courant pour une verticale.

Apparemment il existe donc encore des opinions différentes sur le problème pourtant pas compliqué. En partie la nature elle-même peut en être la cause parce qu'il n'est pas nécessaire que les rivières possèdent toujours le même diagramme, en partie aussi la cause peut se trouver dans des instruments imparfaits ou dans des mesurages inexacts. D'ailleurs il y a peu de données récentes, de sorte que VAN RINSUM (1935) emploie celles de JASMUND par exemple (1893).

Les instruments modernes pour mesurer des courants comme ceux d'OTT ou de RAUSCHELBACH sont assez exacts et il semble logique que les différentes opinions s'accordent en grandes lignes si on emploie les mêmes instruments ou d'autres qui sont aussi perfectionnés.

Quelques différences moins importantes subsisteraient, par exemple le problème si les courants les plus rapides se présentent à la surface ou bien à une petite distance au-dessous, parce que certains instruments, quoique assez exacts, y enregistrent une vitesse trop faible ou trop vite à cause de l'agitation des flots.

Près des rivages abrupts et dans les conduits de laboratoire les courants les plus rapide semblent en effet se trouver au-dessous de la surface. L'importance pratique n'en est pas grande.

Ce qui ne doit pas être traité négligemment dans la pratique c'est la simplicité des formules à employer. Des formules comme celles de HESSLE, de HARDER, de LAVALLE, de CHRISTEN et d'autres dans lesquelles plusieurs facteurs sont réunis, découragent par leur complexité. Tout en donnant peut-être des résultats approximativement exacts, il est difficile de s'en servir pour des buts pratiques. Quoique les Allemands qui ont traité ce sujet récemment, déconseillent l'emploi de paraboles à axes verticaux, l'auteur de cet opuscule-ci a essayé d'examiner si la plus simple parabole imaginable, c'est à dire:

$$v = a \sqrt[9]{h} \quad (1)$$

s'approchait d'assez près des données du Rijkswaterstaat, recueillies durant les années 1931—1935 en nombre de quelques milliers de diagrammes, pour avoir une valeur pratique.

Dans cette formule v est la vitesse à une hauteur de b mètres et a celle à un mètre au-dessus du fond, tandis que g est un chiffre qui se trouvait être entre 5 et 9.

La figure 1 donne un nombre d'exemples de diagrammes de courant pour des verticales, dans lesquels les paraboles approximatives correspondant à la formule (1) sont aussi tracées.

La concordance entre les diagrammes ne semble pas seulement servir à des buts pratiques, mais le fait que les enregistrements se trouvent tantôt à l'intérieur, tantôt à l'extérieur de la parabole pure fait penser que la formule (1), quoique simple, est aussi plus ou moins exacte au point de vue théorique. *Les courants grandissent d'après quelque loi régulière avec les hauteurs h .*

Il faut remarquer que les courbes de la figure (1) sont les moyennes de 6 courbes individuelles, récoltées à un certain point du cours d'eau pendant trois heures de suite de la partie la plus importante du flux ou du reflux.

Les diagrammes individuels des courants dans une verticale montrent plus de formes irrégulières, causées par des pulsations qui augmentent ou diminuent la vitesse moyenne d'environ 10%. Les diagrammes assez réguliers de la figure 1 pourraient aussi être obtenus, si on avait mesuré au moins pendant 3 ou 5 minutes à des points différents de la verticale, mais cela prend trop de temps dans des eaux à marée, surtout quand la profondeur est de quelque importance.

La figure 2 représente un graphique de la formule de JASMUND:

$$v = A + B \log (h + c), \quad (2)$$

et un de celle de VAN RINSUM:

$$v = K_s \sqrt{Hh} + \mu \sqrt{(2Hh - h^2) i} \quad (3)$$

La formule simple (1) y est notée aussi.

Il paraît que les trois courbes diffèrent peu entre elles et que la formule simple peut être considérée comme représentant la même exactitude que les formules plus compliquées.

D'après notre expérience d'ailleurs la ligne logarithmique de JASMUND est trop oblique près de la surface, tandis que celle de VAN RINSUM y est trop perpendiculaire.

DEGRÉ DE PLÉNITUDE.

Au moyen de la formule

$$v = a \sqrt[q]{h}$$

nous pouvons déterminer facilement les courants de fond, les courants de surface et les courants moyens, dès qu'on connaît le degré de la parabole (q) et un seul point du diagramme. De cette manière on peut savoir les courants de toute la verticale au moyen de données obtenues avec des mesureurs de courants auto-enregistreurs qui ne fonctionnent qu'à un seul point.

L'avantage de la formule parabolique est son intégration extrêmement simple. La vitesse moyenne v_m est la $\frac{q}{q+1}$ -ième partie de la vitesse de surface v_s et l'aire (hachée) de la parabole est la $\frac{q}{q+1}$ -ième partie du

rectangle enveloppant. Cela se relève immédiatement par l'intégration :

$$F = \int_0^H v dh = a \int_0^H h^{1/q} dh = \frac{q}{q+1} H v_{\max}.$$

La proportion :

$$\gamma = \frac{q}{q+1}$$

est appelée ici „le degré de plénitude” de la parabole. Ce γ est exprimé par les formules suivantes :

$$\gamma = \frac{v_m}{v_s} \quad (5)$$

$$v_m = \gamma a H^{1/q} \quad (6)$$

tandis que

$$v_s = a H^{1/q} \quad (7)$$

On déduit γ ainsi : Au moyen de la planimétrie on peut connaître l'aire du diagramme de la verticale. Le point C du rectangle enveloppant est fixé en tirant une ligne EC (voir la figure 4) ; alors γ se trouve être $\frac{F_{\text{par.}}}{F_{\text{ABCD}}}$.

En comparant les γ pour les diagrammes de la verticale d'une certaine partie de la rivière, on aboutit à la conclusion que γ ne change pas beaucoup, pourvu que la rivière soit régulière et qu'on élimine le diagramme obtenu près des rivages.

En 1875—79 les ingénieurs du Rijkswaterstaat ont mesuré 532 diagrammes dans le Rhin, le Waal, le Lek, l'IJssel et dans la Meuse, dont nous avons déduit les degrés de plénitude (notés à la page 9). Ils varient moins pour le Rhin et ses branches que pour la Meuse, probablement parce que cette rivière-ci est étroite, irrégulière et sinueuse.

Comme le degré de plénitude pour le Rhin et ses branches est $\gamma = 0,87^5$ environ, il en résulte que la formule de sa parabole est approximativement

$$v_s = a \sqrt[7]{h}$$

Le chiffre $0,87^5$ est le même qu'EHRENBERG (1929) a trouvé dans le canal du Danube (FORCHHEIMER, Hydraulik, 1931, page 183) en comparant v_m et v_s .

UNE PARABOLE DU CINQUIÈME DEGRÉ POUR DES COURANTS MARINS.

Les diagrammes de la verticale des courants dans des eaux saumâtres sont très irréguliers (voir la figure 5). Pendant le reflux ils y sont trop „maigres”, et pendant le flux trop „pleins”, tandis que pendant une partie de la marée les courants de surface sont en sens contraire à celui des courants de fond. Si les différences en poids spécifique qui sont la cause de ces phénomènes restent en-dessous d'environ 1 ‰ les diagrammes sont normaux. Tel est le cas de la Mer du Nord, de la Manche et des bras de mer méridionaux et septentrionaux des côtes hollandaises excepté les embouchures du Rhin, de la Meuse et de l'Escaut.

A ces endroits aux eaux homogènes l'„Oceaan” obtint environ 1000 diagrammes de verticaux. Les γ de ceux du Vlie sont représentés par le tableau à la page 11, le degré de plénitude moyen que nous avons trouvé, fut:

$$\gamma = 0,84$$

et le $\frac{[\text{mm}]}{x} = 0,029$. Il en résulte que la parabole moyenne pour le bras de mer du Vlie est

$$v = a \sqrt[5]{h}$$

Nous avons pris environ 300 diagrammes dans le Pas de Calais en 1934/35. Ils furent mesurés à 31 endroits différents, ayant des profondeurs qui variaient de 30 à 70 mètres. La parabole moyenne que nous avons trouvée ici, se trouvait être à peu près la même que celle trouvée dans le Vlie, à savoir:

$$v = a \sqrt[4,9]{h}$$

(voir les figures 6 et 7). Le facteur $\frac{[\text{mm}]}{x}$ était 0,043. Il y avait de bonnes raisons pour ce chiffre assez important, parce que les γ les plus anormaux se présentaient à des endroits où le fond était très rocheux et irrégulier (points du mesurage, G, F, L et Q). Quand on omet ceux-ci on obtient un facteur $\frac{[\text{mm}]}{x}$ qui est beaucoup mieux c.à.d.: 0,006. Alors γ devient 0,838 et la parabole pour le Pas de Calais est identique à celle du Vlie.

$$v = a \sqrt[5]{h}$$

Les γ pour le Pas de Calais se trouvent à la page 15.

Nous n'avons pu mesurer une influence quelconque du vent sur la forme des diagrammes. Quoique des vents forts s'y manifestassent, les diagrammes conservaient leurs formes normales.

En 1936 nous avons mesuré à 9 lieues de Douvres pendant 16 jours suivants et nous y avons obtenu une série de 392 diagrammes. Le fond de cet endroit était assez plan et à ± 35 mètres au-dessous de la surface moyenne. Nous avons déterminé les moyennes de diagrammes en prenant chaque fois 5 ou 6 pendant chaque flux et reflux. Elles sont représentées dans la figure 8. Les résultats obtenus sont:

$$\gamma_m = 0,845 \frac{[\text{mm}]}{x} = 0,011$$

$$v = a \sqrt[4]{H}$$

Voir aussi le tableau à la page 17.

On peut trouver cette valeur $q = 5,2$ à $q = 5,4$ également dans d'autres parties des eaux à marée homogènes de la Hollande.

La conclusion que les diagrammes d'une verticale peuvent être représentés par une parabole de cet ordre comprend que la vitesse moyenne v_m se trouve à une hauteur qui est $0,4 H$ au-dessus du fond. La lettre H représente la profondeur totale.

Comme nous l'avons démontré ci-dessus des fonds rocheux ou bien des ondulations de sable énormes dans le fond peuvent déranger quelque peu la distribution régulière des courants.

DES COURANTS DE FOND.

Dans des rivières larges ayant des profondeurs relativement petites, comme c'est le cas du Rhin et de ses branches, la vitesse moyenne dans une verticale peut être exprimée par la formule bienconnue

$$v_m = c_1 H^m i^p \quad (12)$$

dans laquelle c_1 est une (supposée) „constante”, H la profondeur et i la pente, n et p ne sont que des nombres abstraits.

Au même moment et au même endroit la formule

$$v_m = \gamma a H^{1/4} \quad (13)$$

est valable. Il en résulte que le courant à un mètre au-dessus du fond:

$$a = \frac{c_1}{\gamma} i^p H^{n-1/4} \quad (14)$$

dépend de la profondeur de la rivière.

D'après des explorateurs modernes n est environ $\frac{2}{3}$ et p environ $\frac{1}{2}$ (voir le tableau à la page 19). C'est pourquoi au lieu de la formule bien connue

$$v = c \sqrt{Hi}$$

il vaut mieux écrire:

$$v = c_1 H^{2/3} i^{1/2},$$

mais l'expérience apprend que la première formule ne donne pas de mauvais résultats, pourvu que nous déterminions nous-mêmes le c de nos rivières au moyen de mesures de débits. Dans la dite „constante” de toute formule hydraulique les erreurs de toutes les suppositions incorrectes ou de toutes les omissions que nous ne pouvons pas éviter sont amassées. Une petite erreur en n ou p est de peu d'importance quand on a fixé c proportionnellement.

Pour notre but pourtant, c'est à dire pour la déduction de la formule pour des courants de fond c'est d'une grande importance si $n = \frac{1}{2}$ ou $n = \frac{2}{3}$.

Pour $n = \frac{1}{2}$ nous trouvons:

pour $q = 2$ (paraboles ordinaires)	$a : : H^0 = 1$
pour $q = 5$ (bras de mer et Mer du Nord)	$a : : H^{0.3}$
pour $q = 7$ (rivières larges)	$a : : H^{0.36}$

C'est pourquoi des cours d'eau ayant des diagrammes de la verticale qui peuvent être représentés par des paraboles ordinaires doivent avoir des courants de fond qui sont indépendants de la profondeur.

Pour $n = \frac{2}{3}$ nous trouvons:

pour les bras de mer et la Mer du Nord ($q = 5$)	$a = \frac{c_1}{\gamma} i^{1/2} H^{0.47}$
pour les rivières larges ($q = 7$)	$a = \frac{c_1}{\gamma} i^{1/2} H^{0.52}$

Il en résulte que les explorations semblent prouver que les courants de fond (1 mètre au-dessus du fond) sont à peu près *proportionnels à la racine de la profondeur*:

$$a = \frac{c_1}{\gamma} \sqrt{Hi} \quad (15)$$

Il faut remarquer que cette formule est basée sur des mesures de courants et pas seulement sur une hypothèse théorique, parce que l'exposant $n = \frac{2}{3}$

été déduit de données de mesures aussi bien que la formule parabolique. Il en résulte qu'à mesure qu'une rivière est plus profonde, l'écurage est plus grand.

LA FORCE TANGENTIELLE.

Beaucoup d'auteurs qui ont traité ce sujet supposent qu'il existe ce qu'on appelle une vitesse de fond v_b et ils tracent le diagramme de vitesse de manière qu'il touche le fond à une distance v_b du zéro de la figure. C'est pourquoi ils trouvent une formule composée de deux termes $v_b + v_h$ dans laquelle v_h varie avec la hauteur au-dessus du fond. Cela ne correspond pas à la réalité.

Même si le fond était absolument plat et uni, la couche d'eau la plus basse ne serait pas mobile. La seconde couche d'eau aurait une petite vitesse, la troisième une plus grande vitesse etc. La vitesse augmente donc avec la hauteur h d'après des lois régulières, et des changements soudains ne sont pas possibles. Le point de contact avec le fond du diagramme doit coïncider avec le zéro de la figure. Nous trouvons une chose analogue si nous regardons par-dessus la rambarde d'un navire en mouvement (fig. 9). Le frottement intérieur (viscosité) des couches d'eau et les tourbillons sont cause que les 2^{ième}, 3^{ième}, 4^{ième} couches sont entraînées par le navire.

La force qui cause cet entraînement s'affaiblit quand on s'éloigne du navire.

Par analogie avec un navire en mouvement nous pourrions nous représenter une rivière dont le lit se mouvrait d'une vitesse constante AD (fig. 10), tandis que l'eau ne coulerait pas. Le fond attirerait l'eau; les couches inférieures avec plus de force que les couches supérieures. L'aire hachée de la figure 10 serait la vitesse „perdue par le frottement”. Si nous savions la vitesse supposée AD, nous serions capable de connaître l'extension de cette aire hachée et nous aurions obtenu un chiffre pour le frottement intérieur et extérieur dans la rivière.

L'équation des forces est:

$$\frac{dT_h}{dh} = - \rho g i \quad (16)$$

Dans cette formule T_h représente la force tangentielle entre deux couches, h la distance des couches au-dessus du fond, ρ le poids spécifique,

g l'accélération de la gravitation et i la pente de la rivière. Par intégration on obtient :

$$T_h = \rho g i (H - h)$$

Supposons que $T_h :: \left(\frac{dv}{dh}\right)^2$ et aussi :: avec une correction $f(h, H)$:

$$T_h = \left(\frac{dv}{dh}\right)^2 f(h, H) = \rho g i (H - h)$$

Parce que $\frac{dv}{dh} = \frac{a}{q} h^{1/q-1} = \frac{c_1}{\gamma q} H^{1/2} h^{1/q-1}$

est : $f(h, H) = \frac{\gamma^2 \rho g q^2}{c_1^2} \frac{H-h}{H} h^{2-2/q}$

et par conséquence :

$$T_h = \mu \frac{H-h}{H} \left(\frac{dv}{dh} h^{1-1/q}\right)^2 \quad (18)$$

et $\mu = \frac{\rho g q^2 \gamma^2}{c_1^2} \quad (19)$

On peut superposer cette force T_h aux forces du vent et à celles qui sont produites par des différences en poids spécifique des couches d'eau.

A la surface $h = H$ et $T_h = 0$

Au fond $h = 0, \frac{dv}{dh} = \infty$ et $T_h = \rho g i H$

TABLE DE CORRECTION POUR DES FLOTTEURS.

Des flotteurs, sous forme de perches lestées en plomb dans leurs parties inférieures, sont des bons instruments pour mesurer les vitesses dans le profil d'une rivière. Ils ne peuvent pourtant jamais atteindre au fond, de sorte qu'on ne peut pas tenir compte des vitesses près du fond et qu'on obtient un écoulement total qui est trop grand.

Si nous partons de la formule :

$$v = a \sqrt[q]{h}$$

la vitesse moyenne v_{AB} entre h_1 et H (fig. 11) est :

$$v_{AB} = v_{\text{flotteur}} = \frac{a}{H - h_1} \int_{h_1}^H \sqrt[q]{h} dh = a \gamma \frac{H^{1/q+1} - h_1^{1/q+1}}{H - h_1}$$

parce que $v_m = a\gamma H^{1/q}$,

$$\alpha = \frac{v_m}{v_{\text{flotteur}}} = \frac{(H-h_1) H^{1/q}}{H^{1/q+r} - h_1^{1/q+r}}$$

ou
$$\alpha = \frac{r}{1 - (1-r)^{1/q}} \quad (20)$$

Dans cette formule $r = \frac{\text{longueur du flotteur}}{\text{profondeur} = H}$

La table à la page 25 donne les corrections pour des r différents et pour des paraboles différentes.

VELOCITIES IN A VERTICAL LINE OF A STREAM,
AS MEASURED ON BOARD THE RIJKSWATERSTAAT
SURVEY-SHIP „OCEAAN”.

CONTENTS: Deduction of simple formulas for current diagrams in a vertical line of a stream, bottom currents and tangential forces. Correction indexes for floats.

CURRENT DIAGRAMS FOR VERTICALS.

According to old and recent measurements of the Rijkswaterstaat the diagrams for the currents from top to bottom show the following characteristics: The strongest currents occur at the surface, whereas the gradient increases towards the bottom in such a manner, that the diagrams resemble parabolas with vertical axes, whose tops touch the bottom in the zero of the figure.

Most investigators reached other conclusions; some found rectilinear or logarithmic forms, others elliptical or even parabolical ones with horizontal axes, etc. The recent German writers about this subject such as FORCHHEIMER (1931) and VAN RINSUM (1935) maintain that parabolic forms with vertical axes are not suitable for approximating the current diagrams for a vertical.

Apparently there is still much difference of opinion, though the problem is not very complicated. Partly nature itself may be the cause of these different opinions, because rivers need not always have the same current-diagram for a vertical, partly the cause may lie in incorrect instruments or incorrect measurements. Moreover recent data are rare, so that VAN RINSUM (1935) for example uses those of JASMUND (1893).

The modern instruments for measuring currents, such as those of OTT or RAUSCHELBACH, are reliable and it seems logical that, when those or any other good modern instruments are used, different opinions would unite in principles. Some minor differences would remain, for instance about the question whether the quickest currents occur at the surface or a small distance below it, as some instruments are over-registrators, others under-registrators near the surface because of wave-turbulence.

Near steep shores or in laboratory-gutters the quickest currents seem to lie indeed below the surface. The practical significance of this is not great.

The thing that is not to be overlooked in practice is the simplicity of the formulas to be used. Formulas such as those of HESSLE, HARDEN, LAVALLE, CHRISTEN and others, in which many different factors are gathered in a formidable way give perhaps good approximative results, but nobody can use them for practical purposes.

Although the German writers on this subject discourage the use of parabolas with vertical axes, the present writer has tried whether the simplest parabola imaginable, namely

$$v = a \sqrt[q]{h} \quad (1)$$

would come close enough to the current-measurements data, collected during the years 1931—1935 to the amount of several thousands by the Netherlands „Rijkswaterstaat”, to be of practical value.

In this formula v is the velocity at a height of h metres, and a the velocity at 1 metre above the bottom, while q is a figure, which proved to be between 5 and 9.

Fig. 1 gives a number of specimens of current diagrams for verticals, in which the approximative parabolas according to formula (1) were drawn also.

The correspondence seems not only to be good enough for practical purposes, but the fact that sometimes the parabola is on one side of the measurement-data and sometimes on the other side suggests that the formula (1), though simple, is more or less theoretically right too. *The currents increase with the distance to the bottom according to some regular law.*

It should be noticed that the curves pictured in fig. 1 are the averages of about 6 individual ones, taken in one point of the stream during 3 successive hours of the main ebb and flood. The individual diagrams of the currents from top to bottom show more irregular forms, because of pulsations, which increase or decrease the mean velocity by about 10%. The rather regular diagrams shown in fig. 1 could also have been obtained by taking measurements for at least 3 or 4 minutes in several points of the vertical, but in tidal streams this takes too much time, especially when the depth is considerable.

In fig. 2 the formulas of JASMUND:

$$v = A + B \log (h + c) \quad (2)$$

and of VAN RINSUM:

$$v = k_s \sqrt[3]{Hi} + \mu \sqrt{(2Hh - h^2) i} \quad (3)$$

are given graphically. The simple formula (1) is also shown here. It appears that the three curves diverge little, and that the simple formula may be considered as possessing about the same exactness as those that are more complicated.

Moreover, according to our experience, JASMUND's logarithmic line slopes too much near the surface, whereas VAN RINSUM is too perpendicular there.

BLOC-COEFFICIENT.

Bij means of the formula

$$v = a \sqrt[q]{h}$$

we can determine the bottom-, surface- and mean currents quite easily, as soon as the degree of the parabola (q) and one single point of the vertical-diagram are known. In this way the currents of the whole vertical can be learned from the data obtained with self-registrating current-meters, working in one point only.

The advantage of the parabolic formula is its extremely simple integration. The mean velocity v_m is the $\frac{q}{q+1}$ -th part of the surface-velocity v_s , and the area of the parabola is the $\frac{q}{q+1}$ -th part of the enveloping square. This is learned immediately by integration:

$$\Gamma = \int_0^H v dh = a \int_0^H h^{1/q} dh = \frac{q}{q+1} H v_{\max.}$$

The proportion:

$$\gamma = \frac{q+1}{q} \quad (4)$$

is called here the "*bloc-coefficient*" of the parabola.

This γ is expressed in the following formulas:

$$\gamma = \frac{v_m}{v_s} \quad (5)$$

$$v_m = \gamma aH^{1/q} \quad (6)$$

while
$$v_s = aH^{1/q} \quad (7)$$

γ is determined as follows. By means of planimetry the area of the vertical diagram is ascertained. Point C of the enveloping rectangle must be fixed approximately by sketching a line EC (see fig. 4). Then γ is to be found as $\frac{F_{\text{par}}}{F_{\text{ABCD}}}$.

When comparing the γ 's for the vertical diagrams of a certain river-part, one comes to the conclusion that γ does not change much, provided the river is regular and the diagrams taken near the shores are left out.

In 1875—'79 Rijkswaterstaat engineers measured 532 diagrams in the Rhine, Waal, Lek, IJssel and Maas, of which the bloc-coefficients, given on page 9 are deducted. They vary less for the Rhine and its branches than for the Maas, apparently because the latter is narrow, irregular and winding. The bloc-coefficient for the Rhine and its branches being about $\gamma = 0,875$, it follows that the parabola formula is approximately:

$$v = a \sqrt[7]{h}$$

The coefficient 0,875 is the same as found by EHRENBURG (1924) in the Donau Canal (FORCHHEIMER, *Hydraulik* 1931, pag. 183) by comparing v_m and v_s .

A PARABOLA OF THE 5th DEGREE FOR SEA-CURRENTS.

The vertical-diagrams of the currents in brackish waters are greatly distorted (see fig. 5). With ebb they are too „thin”, which flood too „full”, whereas during part of the tide the surface currents run opposite to the bottom currents. If the differences in specific weight, which cause these phenomena, remain under about 1‰ , the diagrams are not affected noticeably any more. Such is the case in the North Sea, in the English Channel, and in the southern and northern inlets of the Dutch coasts, except those between Haringvliet and Hoek van Holland and in the Scheldt.

In these places with homogenous water the „Oceaan” gathered about 1000 vertical-diagrams. The γ 's of those of the Vlie-inlet are given in the table on page 11, the mean bloc-coefficient found being

$$\gamma = 0,84,$$

and the $\frac{[mm]}{x} = 0,029$. From this it follows that the mean parabola for the Vlie inlet is:

$$v = a \sqrt[5.2]{h}$$

About 300 vertical diagrams were taken in the Straits of Dover in 1934/35. They were measured in 31 different spots, with depths varying from 30 to 70 metres. The mean parabola found here proved to be almost the same as the one found at the Vlie-inlet, namely

$$v = a \sqrt[4.9]{h}$$

(see fig. 6 and 7). The $\frac{[mm]}{x}$ -factor was 0,043. For this, however, good reasons existed, because the γ 's that were abnormal, always occurred at places where the bottom was very rocky and irregular (measuring points G, F, L and Q). When these are omitted a much better $\frac{[mm]}{x}$ factor is obtained namely = 0,006.

Then γ becomes = 0,838 and the parabola for the Straits of Dover becomes the same as the one for the Vlie-inlet.:

$$v = a \sqrt[5.2]{h}$$

The γ 's for the Straits of Dover are printed on page 15. The influence of wind on the form of the diagrams was not noticeable.

In 1936 a series of 392 diagrams were measured at point D, situated 5 miles off Dover. The bottom of that place was rather flat and abt. 35 metres below the mean surface. The diagrams were averaged by taking groups of 5 or 6 for every ebb and for every flood. These averages are shown in fig. 8. The results are

$$\gamma = 0,845 \quad \frac{[mm]}{x} = 0,011$$

$$v = a \sqrt[5.4]{h}$$

See also the table on page 17.

This figure $q = 5,2$ to $q = 5,4$ is also found in other parts of the Dutch tidal homogeneous waters.

The conclusion that the vertical diagrams can be represented by a parabola of that order involves, that the mean velocity v_m occurs at a height of $0,4 H$ above the bottom. The letter H stands for the total depth.

As is shown above, high rocks or huge sandwaves on the bottom may disturb the regular distribution of the currents to some extent.

BOTTOM CURRENTS.

In wide rivers with comparatively small depths as is the case with the Rhin and its branches, the mean velocity in a vertical may be represented by the well-known formula:

$$v_m = c_1 H^n i^p \quad (12)$$

in which c_1 is a so-called "constant", H the total depth and i the slope; n and p are merely figures.

At the same time and place the formula

$$v_m = \gamma a H^{1/q} \quad (13)$$

holds good. From this follows the current at 1 metre above the bottom

$$a = \frac{c_1}{\gamma} i^p H^{n-1/q} \quad (14)$$

to be in some degree *subject to the depth of the river*.

According to recent investigators n is about $\frac{2}{3}$, and p about $\frac{1}{2}$ (see the table on page 19).

Therefore the well-known formula

$$v = c \sqrt{Hi}$$

had better be written as

$$v = c_1 H^{2/3} i^{1/2},$$

but experience teaches that the first formula does not give bad results, provided we ourselves determine c by means of measurements. The so-called "constant" in any hydraulic formula stands for all incorrect suppositions or omissions, which we are bound to make. A small mistake in n or p does not matter so much when c is fixed proportionately.

For our purpose however, i.e. the determination of the formula for bottom currents, it is of eminent importance whether $n = \frac{1}{2}$, or $n = \frac{2}{3}$.

For $n = \frac{1}{2}$ we find:

for $q = 2$ (ordinary parabolas)	$a :: H^0 (= 1)$
for $q = 5$ (inlets and North Sea)	$a :: H^{0.3}$
for $q = 7$ (large rivers)	$a :: H^{0.36}$

Therefore streams having vertical-diagrams, which can be represented by an ordinary parabola, would possess bottom currents that are independent of the depth:

For $n = \frac{2}{3}$ we find:

for the inlets and the North Sea:	$a = \frac{c_1}{\gamma} i^{1/2} H^{0.47}$
for large rivers ($q = 7$)	$a = \frac{c_1}{\gamma} i^{1/2} H^{0.52}$

From this it follows that modern investigations seem to prove that the bottom currents (1 m above the bottom) are about *proportional to the root of the depth*.

$$a = \frac{c_1}{\gamma} \sqrt{Hi} \quad (15)$$

It should be noted that this formula is based on current-measurements, and not on mere theory, because the exponent $n = \frac{2}{3}$ was derived from measurements-data as well as the parabola-formula. It involves that as the river is deeper the scour will be proportionately greater.

TANGENTIAL FORCE.

Many writers suppose that there exists a so-called bottom-velocity v_b , and they draw the velocity-diagram in such a way that it touches the bottom at a distance v_b from the zero of the figure. They therefore find a formula, composed of two terms $v_b + v_h$, in which v_b is constant and v_h varying with the height above the bottom.

This is not in accordance with natural phenomena. Even if the bottom were flat and smooth, the lowest layer would not move. The second layer would have a small velocity, the 3rd a quicker, etc.

The velocity from the bottom to the top-layers must change according to regular laws and there can be no sudden changes.

The point of contact with the bottom of the diagram has to coincide with the zero of the figure. We find the same when looking over the railing of a moving ship (fig. 9). The inner friction of the water layers, and much more so the turbulence, cause the 2nd, 3rd, 4th layers to be dragged in the direction of the moving ship. The larger the distance from the ship, the smaller the force, which causes the water to be dragged with the ship.

In analogy with a moving ship we can imagine the riverbed moving with a constant velocity AD (fig. 10) and the water at rest. The bottom would drag the water with it; the lowest layers more than the higher ones. The harcelated area in fig. 10 would be the velocity "lost by friction". If we knew the imaginary velocity AD, we should be able to know the extent of this harcelated area, which would represent a figure for the inner and outer friction in the river.

The power-equation is =

$$\frac{dT_h}{dh} = - \rho g i \quad (16)$$

In this formula T_h is the tangential force between two layers, h the distance of the layers above the bottom, ρ the specific weight, g the acceleration of gravity and i the slope of the river.

Integration gives $T_h = \rho g i (H-h)$ (17)

Suppose $T_h : : \left(\frac{dv}{dh}\right)^2$ and also : : with a certain correction $f(h, H)$:

$$T_h = \left(\frac{dv}{dh}\right)^2 f(h, H) = \rho g i (H-h).$$

Because $\frac{dv}{dh} = \frac{a}{q} h^{1/q-1} = \frac{c_1}{\gamma q} H^{1/2} i^{1/2} h^{1/q-1}$

hence $f(h, H) = \frac{\gamma^2 \rho g q^2}{c_1^2} \frac{H-h}{H} h^{2-1/q}$

and therefore:

$$T_h = \mu \frac{H-h}{H} \left(\frac{dv}{dh} h^{1-1/q}\right)^2 \quad (18)$$

and $\mu = \frac{\rho g \gamma^2 q^2}{c_1^2}$ (19)

This force T_h can be superimposed on the forces of the wind and on those resulting from differences in specific weight of the water-layers. At the surface $h = H$, and $T_h = 0$.

At the bottom $h = 0$, $\frac{dv}{dh} = \infty$ and $T_h = qH$.

CORRECTION-INDEX FOR FLOATS.

Floats in the form of sticks, weighted with lead at the lower end, are good instruments for measuring velocities in a river-profile. They never can extend to the bottom however, so that the velocities near the bottom are not taken into account and the total flow is found too high.

Starting from the formula:

$$v = a \sqrt[q]{h}$$

the mean velocity v_{AB} between h_1 and H (fig. 11) is

$$v_{AB} = v_{float} = \frac{a}{H - h_1} \int_{h_1}^H \sqrt[q]{h} dh = a \gamma \frac{H^{1/q+1} - h_1^{1/q+1}}{H - h_1}$$

Because $v_m = a\gamma H^{1/q}$, the correction α is:

$$\alpha = \frac{v_m}{v_{float}} = \frac{(H-h_1) H^{1/q}}{H^{1/q+1} - h_1^{1/q+1}}$$

or:
$$\alpha = \frac{r}{1 - (1-r)^{1/\gamma}} \quad (20)$$

In this formula $r = \frac{\text{length of float}}{\text{depth} = H}$

The table on page 25 gives the corrections α for different r 's and different parabolas.

Bij den Dienst van de Nederlandsche Staatscourant, Rijksuitgeverij te 's-Gravenhage, zijn mede verkrijgbaar gesteld:

Wetten, decreten, besluiten, tractaten en andere bescheiden betreffende den Waterstaat in Nederland 1927, (64ste vervolg), II deelen. Prijs f 32.

idem	1928, (65ste "), II " " "	f 30.
idem	1929, (66ste "), I deel. " " "	f 20.
idem	1930, (67ste "), II deelen. " " "	f 25.
idem	1931, (68ste "), I deel. " " "	f 20.
idem	1932, (69ste "), II deelen. " " "	f 25.
idem	1933, (70ste "), II " " "	f 22.
idem	1934, (71ste "), II " " "	f 30.

Alphabetisch register 1923 tot en met 1932 f 7.

N.B. Voor zoover voorhanden, zijn ook vroegeré jaarboeken nog verkrijgbaar.

Rapporten en Mededeelingen van den Rijkswaterstaat.

N^o. 11. Nota, betreffende berekeningen omtrent rivierverbeteringen, samengesteld door den ingenieur van den Rijkswaterstaat C. W. LELY. Prijs f 0.25.

N^o. 17. Verslag van een bezoek, gebracht door den Hoofdingenieur-Directeur van den Rijkswaterstaat A. A. H. W. KONIG en den Ingenieur van den Rijkswaterstaat G. P. NIJHOFF aan eenige belangrijke beweegbare stuwén in Zwitserland in het jaar 1915, door den Ingenieur van den Rijkswaterstaat G. P. NIJHOFF. Prijs f 1.—.

N^o. 18. I. Het ontwerp voor de stuw in de Maas te Linne, opgemaakt door den Ingenieur van den Rijkswaterstaat F. I. SCHLINGEMANN.

II. Beschrijving van de afsluiting der afvoeropeningen van de stuw in de Maas te Linne, opgemaakt door den Ingenieur van den Rijkswaterstaat G. P. NIJHOFF.

III. Beschrijving van de afsluiting der scheepvaart-opening van de stuw in de Maas te Linne, opgemaakt door den Ingenieur van den Rijkswaterstaat J. W. DE VRIES.

IV. Nota betreffende het te kiezen juksysteem voor de scheepvaart-opening van de stuw in de Maas te Linne, opgemaakt door de Ingenieurs van den Rijkswaterstaat G. P. NIJHOFF, F. VOLKER en J. A. W. M. VETTER.

V. Rapport omtrent de heproefing van scharnierende stuwkleppen, opgemaakt door den Ingenieur van den Rijkswaterstaat C. T. C. HEIJNING. Prijs f 2.—.

N^o. 19. Verslag omtrent het gebruik van Indische en Australische houtsoorten, volgens door den Rijkswaterstaat verstrekte gegevens, opgemaakt door den Hoofdingenieur Jhr. F. E. P. SANDBERG. Prijs f 0.50.

Z. O. Z.

- N^o. 20. I. Verslag betreffende een studiereis naar Duitschland en Frankrijk ondernomen in Maart en April 1921, in verband met den bouw van een schutsluis te IJmuiden, opgemaakt door den Hoofdingenieur van den Rijkswaterstaat Jhr. C. E. W. VAN PANHUYS, de Ingenieurs J. A. RINGERS en J. P. JOSEPHUS JITTA, en den tijdelijk Ingenieur C. TELLEGEN.
- II. Verslag omtrent proeven ter bepaling van de draagkracht en de elasticiteit van het bodemmateriaal, dat te IJmuiden op het terrein van den sluisbouw wordt aangetroffen, opgemaakt door den Ingenieur van den Rijkswaterstaat C. WOLTERBEEK. Prijs f 3.—.
- N^o. 21. Nota, betreffende het verband tusschen bodemhelling en kromtestraal bij rivieren, samengesteld door den ingenieur van den Rijkswaterstaat C. W. LELY. Prijs f 0,50.
- N^o. 22. Verslag betreffende het gebruik van Indische en Australische houtsoorten volgens door den Rijkswaterstaat verzamelde gegevens, samengesteld door de Inspecteurs-Generaal Ir. W. K. DU CROIX en Ir. A. R. VAN LOON. Prijs f 0,70.
- N^o. 23. Proeven en beschouwingen, welke geleid hebben tot het vaststellen van vulling en lediging van de kolk der nieuwe schutsluis te IJmuiden, door Ir. J. A. RINGERS, Hoofdingenieur van den Rijkswaterstaat, en Ir. J. P. JOSEPHUS JITTA, Ingenieur van den Rijkswaterstaat. Prijs f 1,50.
- N^o. 24. I. Onderzoekingen over steenkolenteer, door Dr. Ir. F. J. NELLEN-STEYN, Directeur van het Laboratorium voor chemisch-technisch onderzoek van bouwstoffen voor den wegebouw te Delft.
- II. De analyse van verhard beton, door Ir. R. LOMAN, Ingenieur van den Rijkswaterstaat. Prijs f 0,50.
- N^o. 25. Waterdruk onder de fundering van stuwen en andere waterkeerende kunstwerken, opgemaakt door den Ingenieur van den Rijkswaterstaat Jhr. G. W. v. d. DOES. Prijs f 0,50.
- N^o. 26. I. Verslag Modelonderzoek Koningin Wilhelminahaven te Vlaardingen.
- II. Verslag Modelonderzoek tot verbetering van de invaart tot de havens van Breskens, beide samengesteld aan het Waterbouwkundig Laboratorium te Delft. Prijs f 2.—.
- N^o. 27. Verwerking van de ter zake van beton- en cementonderzoekingen bij den sluisbouw te IJmuiden verzamelde gegevens, opgemaakt door Ir. L. BIENFAIT. Prijs f 2.—.
- N^o. 28. Verslag van een Studiereis naar Duitschland, welke voor een bezoek aan de Oost-Friesche Waddeneilanden en de zee-arnen Eems en Jade in Mei en Juni 1931 werd ondernomen, (met afzonderlijke map met vele kaarten en foto's). Prijs f 2,50.

Voor eerder verschenen publicaties op dit gebied raadplege men den CATALOGUS VAN RIJKSUITGAVEN, welke aan de loketten der postkantoren ter inzage ligt of tegen den prijs van f 0,35 bij de Rijksuitgeverij verkrijgbaar is.