

Inleiding tot het impedantie-begrip en de theorie van de trillings-
filters in de hydraulika.

Door dr ir J.C. Schönfeld.

Inhoud.

1. Inleiding	p. 2
2. Weerstands- en doorlatingselementen	4
3. Traagheidselementen	14
4. Bergingselementen	19
5. Complexe impedanties en admittanties	25
6. Trillingsfilters	34

1. Inleiding.

Het impedantie-begrip heeft betrekking op systemen die bewegingen en in het bijzonder trillingen (slingeringen) kunnen uitvoeren, en eventueel kunnen overdragen, b.v. doordat zich golven door het systeem kunnen voortplanten.

Het impedantie-begrip is het eerst in de elektrotechniek ingevoerd, aanvankelijk voor trillende systemen, doch later ook voor golf-systemen. Het is daarna ingevoerd in de akoustiek, waar dit ook wel het meest voor de hand lag, daar vele akoustische problemen (bij de telefonie, radio enz., en ook bij de meet-methoden in de akoustiek) ten nauwste verband houden met elektrotechnische problemen. Ook in de warmteleer en de mechanika, en sinds kort zelfs in de optika en de quanten-theoretische golfmechanika, is het impedantie-begrip met voordeel ingevoerd.

De schrijver dezes heeft sinds enige jaren geëxperimenteerd met het impedantie-begrip in de hydraulika, en meent nu dat ook hier de invoering van nut kan zijn.

Het impedantie-begrip kan in de eerste plaats beschouwd worden als een mathematisch hulpmiddel. Men kan er geen enkel resultaat mee behalen, dat niet ook langs andere weg behaald zou kunnen worden, doch wel zal men zulk een resultaat vaak gemakkelijker of sneller kunnen behalen door van het impedantie-begrip gebruik te maken. Hierin ligt een overeenkomst met verscheidene mathematische methoden, zoals de differentiaalrekening en de operatorenrekening.

Van fysisch standpunt beschouwd, geeft het impedantie-begrip een samenvatting van een aantal kenmerkende eigenschappen van bepaalde systemen. Daardoor wordt vaak het inzicht in het gedrag van zulk een systeem vergemakkelijkt. Bovendien laten zich allerlei verschillende systemen, zelfs van uiteenlopende fysische aard, met ditzelfde begrip behandelen, en daardoor wordt het overzicht over de theorie dier systemen ver-

gemakkelijkt.

De praktische waarde van het impedantie-begrip is dan ook nog belangrijk toegenomen, sinds men het buiten het oorspronkelijke gebied van toepassing (de elektrotechniek) heeft uitgebreid. Niet alleen kan men hierdoor het inzicht in de analogieën op verschillende gebieden verbeteren (model-techniek), doch ook systemen van gemengde aard (elektrisch-akustisch, hydraulisch-mechanisch, enz.) kunnen vaak zeer elegant behandeld worden met het impedantie-begrip.

De invoering van de methodiek van het impedantie-begrip in de hydraulika zal vooral nut hebben wanneer dit systematisch geschiedt, en zich uitstrekt tot alle onderdelen van de hydraulika die daarvoor in aanmerking komen. Het is verder gewenst dat hierbij in verschillende opzichten aansluiting gezocht wordt bij wat op andere gebieden gegroeid is.

Het doel van deze nota is de grondprincipes van de impedantie-methodiek in de hydraulika uiteen te zetten. Op de toepassing wordt in deze nota niet ingegaan.

2. Weerstands- of doorlatingselementen.

We beschouwen een hydraulisch systeem waar een van ogenblik tot ogenblik veranderende afvoer Q (bijv. in $m^3 \text{sec}^{-1}$) doorheen stroomt. Verondersteld is dus dat het systeem een ingang en een uitgang heeft, en dat op ieder ogenblik door de uitgang evenveel water naar buiten stroomt, als er door de ingang naar binnen stroomt. Een voorbeeld van zulk een systeem is een buis. Laat h_1 (bijv. in m.) de waterstand zijn die overeenkomt met de druk bij de ingang, en h_2 evenzo bij de uitgang.

We zullen het beschouwde systeem een "weerstandselement" of "doorlatingselement" noemen, indien de afvoer Q geheel bepaald is als functie van h_1 en h_2 , dus als het systeem door een wiskundig verband van de vorm

$$Q = F(h_1, h_2)$$

gekenmerkt is.

Voorbeelden hiervan zijn o.a. overlaten en buizen in bepaalde omstandigheden. Zo geldt voor een onvolkomen lange overlaat met breedte b , indien h_1 en h_2 t.o.v. de kruin van de overlaat gemeten worden,

$$Q = \sqrt{2g} b h_2 \sqrt{h_1 - h_2}.$$

Voor een buis met lengte l en diameter d geldt bij turbulente stroming:

$$(1) \quad Q = C \frac{\pi d^2}{8} \sqrt{\frac{d}{l}} \sqrt{h_1 - h_2},$$

waarin C , de coëfficiënt van Chezy, constant kan zijn.

Een belangrijke groep van weerstandselementen is die, waarbij alleen afhangt van het verschil $\Delta h = h_1 - h_2$, dus

$$Q = F(\Delta h)$$

In dat geval is n.l. omgekeerd $h_1 - h_2$ ook als een functie van Q op te vatten $h_1 - h_2 = F(Q)$.

Een voorbeeld hiervan is de hierboven genoemde buis. Daarvoor kan n.l. uit

$$(1) \quad h_1 - h_2 = \frac{64 l}{\pi^2 C^2 d^5} Q^2.$$

worden afgeleid.

We zullen nu in het bijzonder nader ingaan op twee soorten van weerstandselementen waarbij φ van $h_1 - h_2$ afhangt, en wel de lineaire en de quadratische elementen.

Onder een lineair weerstandselement verstaan we hier een systeem waarbij het verval, dat is $h_1 - h_2$, evenredig is met de doorgelaten stroom. Voor zulk een systeem geldt dus een betrekking van de vorm

$$(2) \quad h_1 - h_2 = R\varphi.$$

De coëfficiënt R zullen we de "coëfficiënt van de lineaire weerstand", of, als geen verwarring dreigt, kortweg de "weerstand" van het systeem noemen. Deze coëfficiënt is te omschrijven als het verval dat nodig is om een stroom ter grootte van een eenheid van volumen per eenheid van tijd door het systeem te doen gaan. Wordt het verval in m , en de stroom in $m^3 \text{ sec}^{-1}$ uitgedrukt, dan wordt R in $m^{-2} \text{ sec}$ uitgedrukt.

We kunnen voor het verband tussen verval en stroom ook schrijven

$$(3) \quad \varphi = G(h_1 - h_2), \quad \text{waarin}$$

$$(4) \quad G = \frac{1}{R} \quad \text{en dus} \quad R = \frac{1}{G}$$

is. We zullen G de "coëfficiënt van de lineaire doorlating", of, als geen verwarring dreigt, de "doorlating" noemen. G kan omschreven worden als de stroom die doorgelaten wordt bij een verval ter grootte van de eenheid. We kunnen G bijv. in $m^2 \text{ sec}^{-1}$ uitdrukken.

een voorbeeld van zulk een lineair weerstands- of doorlatings-element is een buis die zo nauw is dat de stroming bij de toe te passen vervallen laminair blijft. Voor een ronde buis met diameter d en lengte l , en een vloeistof met een kinematische viscositeit ν en een dichtheid ρ geldt b.v.

$$R = \frac{128 \nu l}{\pi g d^4} \quad \text{en dus} \quad G = \frac{\pi g d^4}{128 \nu l}$$

waarbij het criterium voor laminaire stroming daarin bestaat, dat het getal van Reynolds, in dit geval gedefinieerd als $Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{4\varphi}{\pi d^2 \nu}$, kleiner blijft dan 2320; bij ruwe wanden komt dit criterium nog iets lager.

We beschouwen nu het geval van een aantal weerstandselementen in

serie, d.w.z. zodanig gekoppeld dat de uitgang van een element direct ver-

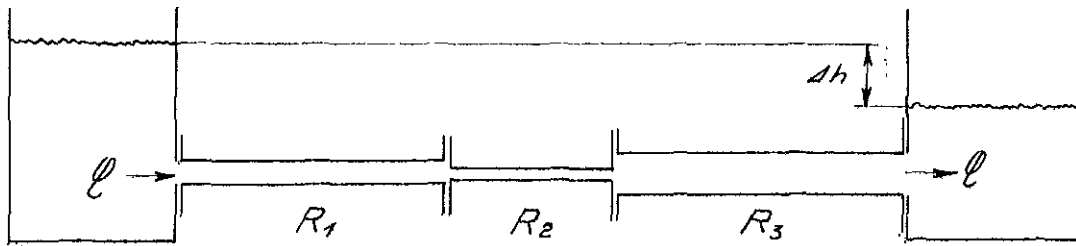


Fig. 1

bonden is met de ingang van het volgende element. (zie fig. 1). De vloeistof die uit het ene element komt, zal dan in het volgende element moeten verder stromen, en alle elementen zullen dus dezelfde stroom Q overdragen.

Het verval over het eerste element, Δh_1 , is dus

$$\Delta h_1 = R_1 Q,$$

over het tweede

$$\Delta h_2 = R_2 Q,$$

enz. wanneer R_1 , R_2 enz. de weerstand van het eerste, tweede enz. element is. Bij de beschreven wijze van het koppelen zal de druk aan het einde van een element gelijk zijn aan de druk aan het begin van het volgende element, d.w.z. dat het totale verval over alle elementen gelijk is aan de som van de vervallen over de afzonderlijke elementen:

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \dots$$

Substitueren we hierin de formules voor de drukvervallen over de afzonderlijke elementen, dan krijgen we voor het totale verval

$$\Delta h = (R_1 + R_2 + \dots) Q.$$

Hieruit volgt dat de gekoppelde weerstandselementen kunnen worden opgevat als een weerstandselement, met een weerstand R , die de som is van de weerstanden van de afzonderlijke elementen:

$$(5) \quad R = R_1 + R_2 + \dots$$

we concluderen dat de weerstanden van in serie gekoppelde weerstandselementen gesommeerd dienen te worden.

Het omgekeerde van een serie-koppeling is in zekere zin een parallel-koppeling van elementen. Bij een parallel-koppeling zijn de ingan-

gen van de verschillende elementen zodanig met elkaar of met eenzelfde vat verbonden, dat in alle ingangen de zelfde druk heersat. Hetzelfde geldt voor de uitgangen. (zie fig. 2). Het verval is dus voor alle elementen hetzelfde, Δh .

Voor de stromen $Q_1, Q_2, \text{ enz.}$ door de verschillende elementen gelden dus de vergelijkingen

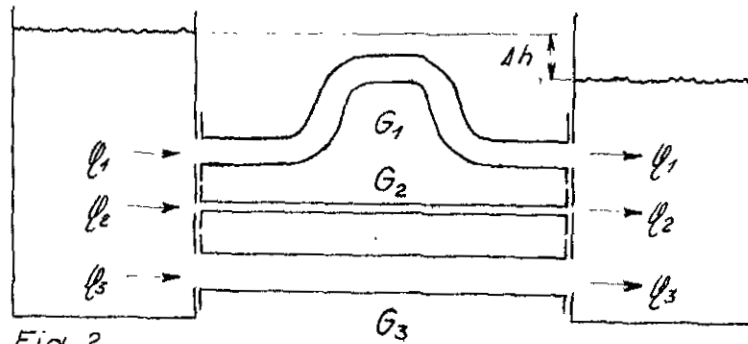


Fig. 2.

$$Q_1 = G_1 \Delta h$$

$$Q_2 = G_2 \Delta h$$

enz., waarbij G_1 de doorlating van het eerste element is, G_2 van het tweede, enz. Door alle elementen te samen wordt een stroom

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots$$

doorgelaten, en hiervoor kunnen we

$$Q = (G_1 + G_2 + \dots) \Delta h$$

afleiden. Hieruit zien we dat de parallel gekoppelde elementen werken als een enkel element met de doorlating

$$(6) \quad G = G_1 + G_2 + \dots$$

Bij parallel gekoppelde elementen moeten dus de doorlatingen worden opgeteld

We zullen nu de quadratische weerstandselementen nader onderzoeken.

In hydraulische systemen zijn vele weerstandsverliezen evenredig met het kwadraat van de in het systeem optredende snelheden; voorbeelden zijn de vertragingverliezen in een zich verwijdende buis, de verliezen in het zog van een obstakel, de verliezen in een bocht, en de wrijvingsverliezen langs wanden bij turbulente stroming. Daar de doorstromende hoeveelheden evenredig zijn met de snelheden, zo zullen de vervallen die uit de weerstandsverliezen voortkomen, veelal evenredig met het kwadraat van de stromen zijn.

we zullen onder een quadratisch weerstandselement een systeem verstaan, waarvoor geldt:

$$(7) \quad h_1 - h_2 = W \varphi^2.$$

Hierin zullen we W de "coëfficiënt" van de quadratische weerstand", of, als geen verwarring, b.v. met de lineaire weerstand dreigt, kortweg de "weerstand" noemen. Deze weerstand kan omschreven worden als het verval dat bij quadratische weerstand optreedt bij doorgang van een stroom ter grootte van de eenheid. We kunnen W b.v. uitdrukken in $m^{-5} \text{ sec}^2$.

Indien het systeem op dezelfde wijze in de andere richting stroom doorlaat, dan geldt bij die andere stroomrichting

$$(8) \quad h_2 - h_1 = W \varphi^2.$$

kennen we nu aan φ een teken toe zodanig, dat φ positief gerekend wordt als de stroom in de ene, en negatief als de stroom in de andere richting door het systeem gaat, dan kunnen we (7) en (8) samenvatten in de formule

$$(9) \quad h_1 - h_2 = W |\varphi| \varphi,$$

waarin $|\varphi|$ de volstrekte waarde van φ is.

Omgekeerd kan de stroom in het verval uitgedrukt worden door een formule van de vorm

$$(10) \quad \varphi = \pm D \sqrt{\pm(h_1 - h_2)}.$$

Hierin zal D , waarvoor geldt

$$(11) \quad D = \frac{1}{\sqrt{W}} \quad \text{en dus} \quad W = \frac{1}{D^2},$$

de "coëfficiënt van de doorlating bij quadratische weerstand", of, als geen verwarring dreigt, kortweg de "doorlating" genoemd worden. Deze grootte geeft de stroom aan die door het systeem vloeit bij een verval ter grootte van de eenheid. We kunnen D b.v. in $m^{2\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1}$ uitdrukken.

een voorbeeld van een quadratisch weerstandselement is een buis of een open waterloop waarin de stromen zo groot zijn, dat de beweging van de vloeistof turbulent is, en bovendien de wanden of de bodem en oevers als hydraulisch ruw mogen worden opgevat. Volgens de wet van Chézy is de gemiddelde snelheid

$$v = C \sqrt{a_r I} = C \sqrt{a_r \frac{dh}{l}},$$

waarin C , de "coëfficiënt van Chezy, in dat geval niet van v afhangt.

Verder is a_r de hydraulische straal van het dwarsprofiel (oppervlak gedeeld door natte omtrek), l de lengte van de buis of waterloop, en Δh het verval. Is A het oppervlak van het dwarsprofiel, dan is dus

$$Q = Av = CA \sqrt{\frac{a_r}{l}} \sqrt{\Delta h},$$

waaruit voor de doorlating

$$D = CA \sqrt{\frac{a_r}{l}},$$

en voor de weerstand

$$W = \frac{l}{C^2 A^2 a_r}$$

volgt. Deze formules zijn ook te schrijven als

$$D = \frac{D}{\sqrt{l}} \quad \text{en} \quad W = \frac{l}{K^2},$$

waarin

$$K = CA \sqrt{a_r}$$

het "afvoervermogen" van het dwarsprofiel is. Dit is gelijk aan de doorlating D van een vak van de waterloop met een lengte 1.

Wordt de weerstand per eenheid van lengte door w voorgesteld zodat $W = wl$ is, dan is

$$(12) \quad w = \frac{1}{K^2}.$$

We staan nu nog even stil bij een waterloop (rivier, zeearm, kanaal) die veel breder is dan diep. Het dwarsprofiel is in fig. 3 geschetst. De diepte a moge afhangen van de plaats in de raai, die door een coördinaat y bepaald wordt. De over de verticaal gemiddelde snelheid v op de plaats y is volgens de wet van Chezy

$$v = C \sqrt{a \frac{\Delta h}{l}},$$

waarin Δh het verval over een lengte l is. De totale afvoer door het gehele dwarsprofiel is dan

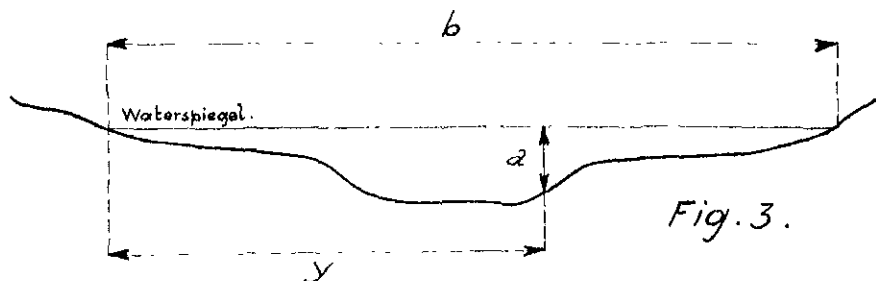
$$Q = \int_0^b v a dy = \sqrt{\frac{\Delta h}{l}} \int_0^b C a^{3/2} dy,$$

waarbij geïntegreerd wordt over de breedte b van het dwarsprofiel. Voor het afvoervermogen van het dwarsprofiel volgt nu de formule

$$(15) \quad K = \int_0^b C a^{3/2} dy.$$

Hierin kan voor C een constante waarde gesubstitueerd worden, doch ook is het mogelijk voor verschillende delen van het dwarsprofiel verschillende

waarden van C te nemen, b.v. voor de uiterwaarden van een rivier een kleinere waarde van C dan voor het zombed.



In geval het getal van Reynolds zo groot is dat de stroming wel turbulent is, doch de wanden niet als hydraulisch ruw mogen worden beschouwd dan hangt C , en dus ook W of D , nog enigszins van φ af.

Het systeem is in dat geval niet zuiver quadratisch, en (9) en (10) kunnen dan slechts als benaderingen gebruikt worden.

we zullen dan nu nagaan hoe gehandeld dient te worden bij koppelen van quadratische weerstandselementen. Bij serie-koppeling (zie fig. 1) geldt weer dat alle elementen dezelfde stroom φ voeren en dat het totale verval Δh , de som is van de vervallen over de afzonderlijke elementen, dus de som van

$$\Delta h_1 = W_1 \varphi^2$$

$$\Delta h_2 = W_2 \varphi^2$$

enz. Voor het totale verval geldt dus

$$\Delta h = (W_1 + W_2 + \dots) \varphi^2,$$

en dus vinden we dat de totale weerstand de som is van de weerstanden van de afzonderlijke elementen,

$$(14) \quad W = W_1 + W_2 + \dots$$

Bij een parallel-koppeling (zie fig. 2) van quadratische weerstandselementen geldt weer dat alle elementen hetzelfde verval opnemen.

Door sermatie van de stromen door de afzonderlijke elementen, dus van

$$\varphi_1 = D_1 \sqrt{\Delta h}$$

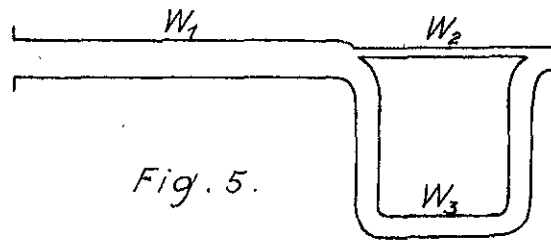
$$\varphi_2 = D_2 \sqrt{\Delta h}$$

enz., vinden we dat de totale doorlating de som is van de doorlatingen der afzonderlijke elementen:

$$(15) \quad D = D_1 + D_2 + \dots$$

De formule (13) voor het afvoervermogen K van een profiel als in fig. 3 geschetst, kan ook met de formule (15) worden afgeleid. Dan moeten voor $D_1, D_2, \text{ enz.}$ de doorlatingen $C\alpha^{3/2}\Delta y$ van naast elkaar gelegen stroken van het profiel met breedte Δy worden gesubstitueerd, en daarna moet de som tot een integraal worden herleid.

Als voorbeeld van de wijze waarop met de afgeleide formules de weerstanden van meer ingewikkelde systemen berekend kunnen worden, beschouwen we het systeem van fig. 5.



Uit (11) volgt dat de doorlatingen van de elementen 2 en 3 zijn: $1:\sqrt{W_2}$ en $1:\sqrt{W_3}$. Uit (14) volgt dan voor de doorlating van de elementen 2 en 3 samen: $1:\sqrt{W_2} + 1:\sqrt{W_3}$. Voor de weerstand van die combinatie vinden we dan volgens (11): $1:\{1:\sqrt{W_2} + 1:\sqrt{W_3}\}^2$. Tenslotte vinden we dan volgens (14) voor de weerstand van het gehele systeem:

$$W = W_1 + \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\sqrt{W_2}} + \frac{1}{\sqrt{W_3}} \right\}^2}.$$

Indien de weerstanden lineair in plaats van quadratisch zouden zijn, dan zouden we op overeenkomstige wijze uit (4) en (5) en (6) kunnen afleiden:

$$R = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}.$$

meer ingewikkelde systemen zijn op overeenkomstige wijze te behandelen.

De ontwikkelde gedachtegang is in het algemeen toe te passen op alle weerstandselementen die een machts-weerstandswet volgen, dus:

$$h_1 - h_2 = R_n \varrho^n$$

Hierin is dan R_n de weerstand.

Omgekeerd is bij zulk een systeem ook

$$\varrho = D_n \sqrt[n]{h_1 - h_2},$$

waarin

$$D_n = 1 : \sqrt[n]{R_n} \quad \left[\text{en dus } R_n = 1 : D_n^n \right]$$

de doorlating is.

Ook nu geldt weer, dat de weerstand R_n van twee weerstandselementen in serie, die beide dezelfde machtswet volgen (dus n gelijk), de som is van de weerstanden van de afzonderlijke elementen. Zijn de elementen parallel, dan moeten weer de doorlatingen D_n worden opgeteld.

Het is duidelijk, dat het lineaire element ($R_n \rightarrow R$ of R_l en $D_n \rightarrow D$ of D_l), en het quadratische element ($R_n \rightarrow W$ of R_q en $D_n \rightarrow D$ of D_q) als bijzondere gevallen van het machts-element zijn op te vatten, n.l. voor $n=1$ en $n=2$.

Een voorbeeld van een machts-element dat geen lineaire of quadratische wet volgt, is een buis met hydraulisch gladde wanden, waarvoor de coëfficiënt van Chézy met een machts-formule benaderd mag worden:

$$C = C^* Re^k;$$

Hierin is Re het getal van Reynolds,

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{2\varrho}{\pi \gamma a},$$

waarbij d de diameter en a de straal van de buis is. De wet van Blasius is zulk een machtswet, waarin dan $k = 1/8$ en $C^* = 16 \text{ m}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$.

De exponent n van de buis is

$$n = 2(1-k)$$

(dus voor Blasius $n = 7/4$), de weerstand is

$$R_n = \frac{2(\frac{3}{2}\pi \gamma \alpha)^{2k} l}{(\pi C^*)^2 \alpha^5}$$

als de lengte van de buis l is, en de doorlating is

$$D_n = \frac{\pi \alpha}{2} \sqrt[1-k]{\frac{C^* \alpha}{\gamma^k}} \sqrt[2]{\frac{\alpha}{l}}$$

Volgt het systeem van fig. 5 een machtwet met de exponent n , dan geldt voor de samengestelde weerstand

$$R = R_1 + \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}} \right\}^n}$$

3. Traagheidsmomenten.

We beschouwen de beweging van de vloeistof in een buis, wanneer de beweging zo snel verandert dat de wrijvingskrachten langs de wand te verwaarlozen zijn t.o.v. de traagheidskrachten die met de veranderingen van de beweging gemoeid zijn. Laat l de lengte van de buis zijn, en A het oppervlak van de dwarsdoorsnede. Dan is ρAl de massa van de vloeistof in de buis, als ρ de dichtheid is. Laat v de gemiddelde snelheid van de vloeistof zijn, dan is de stroom door de buis $Q = Av$.

De versnelling is dus $\frac{dv}{dt}$, en hiervoor kan $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt}$ worden afgeleid.

De kracht die nodig is om deze versnelling te geven, is dan

$$\text{kracht} = \rho Al \times \frac{dv}{dt} = \rho l \frac{dQ}{dt}.$$

Als h_1 en h_2 de met de drukken aan de uiteinden overeenkomende niveaus zijn, dan is ρgh_1 de druk aan het ene, en ρgh_2 aan het andere uiteinde. Daar deze drukken elk over een oppervlak A werken, geven zij krachten $\rho gh_1 A$ en $\rho gh_2 A$, waaruit een kracht $\rho g(h_1 - h_2)A$ resulteert. Dit is de kracht die de bovengenoemde versnelling moet geven, zodat we kunnen stellen:

$$\rho g(h_1 - h_2)A = \rho l \frac{dQ}{dt}.$$

hieruit volgt:

$$h_1 - h_2 = \frac{l}{gA} \frac{dQ}{dt}.$$

Dit verval is eigenlijk de kracht die op een gewichtseenheid van de vloeistof werkt.

we zullen $M = \frac{l}{gA}$

de "coëfficiënt van de traagheid", of kortweg de "traagheid" van de buis noemen, en de beschouwde buis zullen we een "traagheidsmoment" noemen.

In het algemeen verstaan we onder een traagheidsmoment, een systeem waarvoor een betrekking van de vorm

$$(16) \quad h_1 - h_2 = M \frac{dQ}{dt},$$

geldt, als $h_1 - h_2$ het verval over het systeem, en Q de stroom door het systeem is. De coëfficiënt van de traagheid M kan omschreven worden als het

verval dat nodig is om de stroom in een eenheid van tijd met een eenheid van stroom te doen toenemen. (Een eenheid van stroom is een eenheid van volumen per eenheid van tijd). M kan b.v. in $m^{-2} \text{ sec}^2$ worden uitgedrukt.

Bij vele hydraulische systemen met merkbare traagheid zal het niet geoorloofd zijn de wrijvingskrachten te verwaarlozen ten opzichte van de traagheidskrachten. We zullen dit nader onderzoeken voor een buis:

De resterende drukkracht moet in het algemeen evenwicht maken, zowel met de traagheidskrachten als met de wrijvingskrachten. We kunnen dus stellen:

$$(17) \quad h_1 - h_2 = \frac{l}{gA} \frac{dQ}{dt} + \Delta h_w,$$

waarin Δh_w het verval is dat juist evenwicht zou maken met de wrijvingskrachten. Hiervoor zouden we bij laminaire stroming

$$(18) \quad \Delta h_w = R Q,$$

en bij turbulente stroming

$$(19) \quad \Delta h_w = W |Q| Q.$$

kunnen stellen, waarin R of W de coëfficiënt van de weerstand bij stationnaire stroming is. Dit zou evenwel niet juist zijn, daar de versnellingen en vertragingen een andere snelheidsverdeling over het dwarsprofiel van de buis in het leven roepen, dan we bij stationnaire stroming aantreffen.

Bij niet te kleine wrijvingskrachten in verhouding tot de traagheidskrachten, kan als volgt een correctie voor die gewijzigde snelheidsverdeling worden aangebracht:

Aan de wand moet de snelheid van de vloeistof nul worden als gevolg van de adhesie. In een stationnaire stroming ontstaat daardoor een zoodanige snelheidsverdeling dat de snelheden nabij de wand kleiner zijn dan meer in het midden van het dwarsprofiel. Wordt nu het verval over de buis groter, zodat de stroom versneld wordt, dan zal op alle lagen aanvankelijk een zelfde versnellende kracht werken en zullen de lagen bij de wand een zelfde versnelling krijgen als de lagen die om de as van de buis gelegen zijn. In verhouding tot de reeds aanwezige snelheid, worden de lagen bij de wand dan echter meer versneld dan de lagen om de as. Dit betekent dat de snelheidsverdeling de neiging heeft in de versnelde stroming meer gelijk-

matig te worden. In een vertraagde stroming daarentegen zal de snelheidsverdeling de neiging hebben minder gelijkmatig te worden. De snelheid aan de wand blijft evenwel nul, door de adhesie. Wordt de snelheidsverdeling nu over het geheel gelijkmatiger, dan zal evenwel in een gebied vlak bij de wand de snelheidsgradient toch juist groter moeten worden in verband met de adhesie. Een grotere snelheidsgradient houdt in, dat er een grotere wrijvingskracht werkt.

In een versnelde stroom zal dus een grotere wrijvingskracht overwonen moeten worden dan in een stationnaire stroom, en in een vertraagde stroom zal juist een kleinere wrijvingskracht te overwinnen zijn. We zullen daarom aan de uitdrukkingen (18) en (19) correcties toevoegen die evenredig zijn met de versnelling, dat is met

$$\frac{dQ}{dt}:$$
$$\Delta h_w = RQ + M^* \frac{dQ}{dt}$$

of

$$\Delta h_w = W|Q|Q + M^* \frac{dQ}{dt}$$

Voeren we deze uitdrukkingen in (17) in, dan blijkt dat we voor het verval kunnen schrijven

$$(20) \quad h_1 - h_2 = M \frac{dQ}{dt} + RQ$$

bij laminaire stroming en

$$(21) \quad h_1 - h_2 = M \frac{dQ}{dt} + W|Q|Q$$

bij turbulente stroming, wanneer M gesteld wordt voor

$$M = \frac{l}{gA} + M^*$$

Dit betekent dat de invloed van de versnellingen en vertragingen op de snelheidsverdeling en daardoor op de weerstand, in rekening kan worden gebracht door voor de coëfficiënt van de traagheid een grotere waarde te nemen. M stelt hier dus niet de ware traagheid voor, doch een schijnbare traagheid die gedeeltelijk een gevolg is van de weerstand.

Voor een uitvoeriger, en vooral strengere afleiding van (20) en (21) verwijzen we naar een eerdere publicatie van schrijver dezes 2).

2) Schonfeld, J.C., Resistance and inertia of the flow of liquids in a tube or open canal. Applied scientific Research, V. A1 (1947) p. 169-197.

Uit die publicatie halen we nu ook enkele formules voor M voor een ronde buis aan:

Bij laminaire stroming in een buis met cirkelvormige doorsnede is de schijnbare traagheid 33 % groter dan de ware traagheid:

$$M = \frac{4}{3} \frac{L}{g\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{16L}{3\pi g d^2}$$

Bij turbulente stroming is de schijnbare traagheid slechts enkele procenten groter dan de ware traagheid. Zo geldt voor een ronde buis wanneer de wanden als hydraulisch ruw beschouwd mogen worden,

$$M = \left(1 + \frac{71.3}{C^2}\right) \frac{L}{g\pi \frac{d^2}{4}}$$

en indien zij als hydraulisch glad zijn op te vatten,

$$M = \left(1 + \frac{71.3}{(C+77)^2}\right) \frac{L}{g\pi \frac{d^2}{4}}$$

Bij vergelijking van deze formules met de hierboven aangehaalde publicatie, houde men rekening met de iets andere definitie van de impedantieelementen (zie hierachter par. 6).

Uit (20) en (21) zien we dat een buis met weerstand en traagheid schematisch kan worden opgevat als een serie-koppeling van een fictief weerstandselement met de weerstand R , respectievelijk W , en een fictief traagheids-element met de traagheid M . Immers, bij zulk een serie-koppeling geeft het weerstandselement een verval $R\varphi$, respectievelijk $W|\varphi|$, en het traagheids-element een verval $M d\varphi/dt$, en samen geven zij juist hetzelfde verval als de buis met weerstand en traagheid.

Worden twee traagheids-elementen met de traagheden M_1 en M_2 in serie gekoppeld, dan voeren zij dezelfde stroom φ . Het eerste element geeft een verval $M_1 d\varphi/dt$ en het tweede geeft een verval $M_2 d\varphi/dt$. Samen geven zij dus juist hetzelfde verval als een traagheids-element met de traagheid

$$(22) \quad M = M_1 + M_2.$$

Evenals weerstanden, dienen dus ook traagheden te worden opgeteld in geval van een serie-koppeling.

Zijn twee traagheids-elementen parallel gekoppeld, dan staat over beide hetzelfde verval. Het eerste element voert een stroom φ_1 die voldoet aan $d\varphi_1/dt = \Delta h : M_1$, en het tweede voert een stroom φ_2 , die voldoet

aan $dQ_2/dt = \Delta h \cdot M_2$. De totale stroom $(Q_1 + Q_2)$ voldoet dus aan

$$\frac{d(Q_1 + Q_2)}{dt} = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \Delta h,$$

waaruit volgt dat de parallel gekoppelde traagheids-elementen werken als

een traagheids-element met een traagheid M , die uit

$$(23) \quad \frac{1}{M} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$$

volgt.

4. Bergings-elementen.

We beschouwen nu een hydraulisch systeem bestaande uit twee met elkaar verbonden vaten, bijv. de twee benen van een U - vormige buis zo- als in het midden van fig. 5 of van fig. 6 is geschetst. Aan het systeem wordt aan de éne kant vloeistof met een dichtheid ρ (bijv. water) toege-

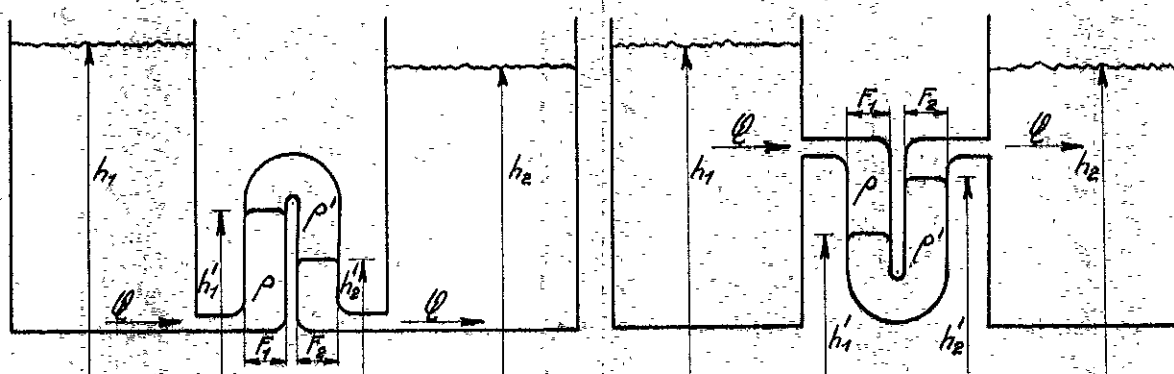


Fig. 5

Fig. 6.

voerd, en aan de andere kant wordt dezelfde soort vloeistof afgevoerd. In het systeem bevindt zich een andere vloeistof of een gas met een andere dichtheid ρ' , en deze vloeistof kan door de verbinding tussen de twee vaten heen en weer stromen. Ingeval de tweede vloeistof lichter is dan de eerste ($\rho' < \rho$, men denke b.v. aan lucht), dan bevindt de tweede vloeistof zich boven (fig. 5), doch is de tweede vloeistof zwaarder ($\rho' > \rho$, men denke b.v. aan kwik), dan bevindt zij zich onder (fig. 6).

Laten h_1' en h_2' de niveaus van de vloeistof met dichtheid ρ in de beide vaten van het systeem zijn. Bij een stationnaire instelling van het systeem maakt het drukverschil tussen de uiteinden van het systeem, $\rho g(h_1 - h_2)$, evenwicht met het verschil in druk door het niveauverschil in de vaten van het systeem, d.w.z. dat we de betrekking

$$(24) \quad h_1 - h_2 = \frac{\rho - \rho'}{\rho} (h_1' - h_2')$$

voor het systeem van fig. 5, en

$$(25) \quad h_1 - h_2 = \frac{\rho' - \rho}{\rho} (h_2' - h_1')$$

voor het systeem van fig. 6 krijgen.

Indien de eerste vloeistof, b.v. water, in en uit het systeem stroomt, dan zullen de vloeistofniveaus in het systeem op en neer gaan.

We zullen nu aannemen dat de drukwisselingen zó klein zijn dat de vloeistoffen (of gassen) als onsamendrukbaar mogen worden opgevat. Verder zullen we de stromen en de veranderingen van die stromen per tijds eenheid zó klein veronderstellen, dat de weerstanden en traagheden in het systeem te verwaarlozen zijn. Dan gaat aan het éne uiteinde op ieder ogenblik een even grote stroom Q naar binnen, als er aan het andere uiteinde naar buiten treedt. Als gevolg van deze stromen zal het niveau in het eerste vat stijgen (fig. 5). Is het oppervlak van het scheidingsvlak der vloeistoffen in dit vat F_1 , dan wordt bij een stijging dh_1 , een hoeveelheid water $F_1 dh_1$ in dit vat opgenomen. Heeft de steiging dh_1 in een tijd dt plaats, dan is dus $F_1 dh_1 / dt$ de hoeveelheid water die per eenheid van tijd wordt opgenomen, en dit is Q . Dus:

$$Q = F_1 \frac{dh_1}{dt} \quad \text{of} \quad \frac{dh_1}{dt} = \frac{Q}{F_1}.$$

Op overeenkomstige wijze volgt nu uit de onsamendrukbaarheid van de tweede vloeistof (lucht of kwik) dat het niveau van het water in het tweede vat zal dalen, en zo vinden we

$$Q = -F_2 \frac{dh_2}{dt} \quad \text{of} \quad \frac{dh_2}{dt} = -\frac{Q}{F_2}.$$

Substitutie van deze uitkomsten in (24) geeft

$$\frac{d(h_1 - h_2)}{dt} = \frac{\rho - \rho'}{\rho} \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) Q,$$

ofwel

$$(26) \quad Q = B \frac{d(h_1 - h_2)}{dt},$$

als we B stellen voor

$$B = \frac{\rho}{\rho' - \rho} \cdot \frac{1}{\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}}.$$

We zullen B de "coëfficiënt van de berging" of kortweg "berging" van het systeem noemen. Deze kan b.v. uitgedrukt worden in m^2 .

Voor het systeem van fig. 6 vinden we met behulp van (25) eveneens een betrekking van de vorm (26), waarin B nu de grootte

$$B = \frac{\rho}{\rho' - \rho} \cdot \frac{1}{\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}}$$

voorstelt.

Meer in het algemeen zullen we onder een "bergingsclement" een

systeem verstaan, waarin tussen het verval over het systeem en de stroom een betrekking van de vorm (26) bestaat.

We beschouwen nu nog nader het geval dat één der uiteinden van het bergingselement met een vat met constant niveau h_0 (b.v. een zeer breed vat of een vat met een overlooprand), verbonden is (fig. 7). Dan is h_2 constant en dus $\frac{dh_2}{dt} = 0$, en (26) kan herleid worden tot

$$(27) \quad \varphi = B \frac{dh_1}{dt}.$$

Een soortgelijk systeem is b.v. het in fig. 8 afgebeelde. Als de

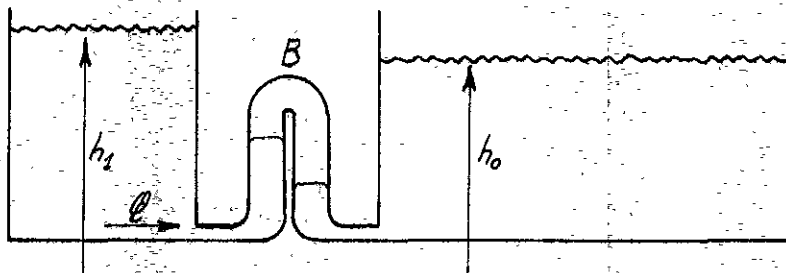


FIG. 7.

Voor Fig. 8 en 9 zie men bladz. 24.

weerstand en traagheden te verwaarlozen zijn, dan neemt het water in het rechter vat de hoogte aan die overeenkomt met de druk aan de ingang van het systeem, dat is de hoogte h_1 . De stroom die het systeem ingaat, beantwoordt dan aan de betrekking (27), waarin B nu niet anders is dan het zogenaamde bergende oppervlak van het vat, dat is het oppervlak van de waterspiegel. Voor wat betreft het verband tussen de stroom en de druidhoogte aan de ingang van het systeem, zijn de systemen van fig. 6 en fig. 7 dus gelijkwaardig.

Ook een systeem dat onder invloed van een drukhoogte stroom kan opnemen en afgeven volgens een betrekking van de vorm (27) zullen we een "bergingselement" noemen. Het begrip "berging" treedt hier eigenlijk ook duidelijker naar voren dan bij elementen als die van fig. 5 of 6, waar de vermeerdering van geborgen water aan de ene zijde, steeds gelijk is aan de vermindering van geborgen water aan de andere zijde van het systeem.

In fig. 9 is nog een ander bergingselement afgebeeld dat ook door een betrekking van de vorm (27) gekarakteriseerd is. Hier bevindt zich boven de rechter vloeistofspiegel een afgesloten hoeveelheid gas met een volume V en een druk p . Een verandering dh_2 van het piezometrisch niveau h_2 aan de ingang van het systeem geeft een drukverhoging $dp = \rho g dh_2$. Volgens de wet van Boyle is het product pV constant, en dus

$$\rho dV + V dp = d(\rho V) = 0,$$

ofwel

$$dp = \rho g dh_1 = - \frac{\rho}{\gamma} dV.$$

Bij vermindering van het volumen van de lucht, zal vloeistof naar binnen stromen volgens

$$Q = - \frac{dV}{dt}.$$

We vinden uit de afgeleide betrekkingen dus

$$Q = \frac{\rho g V}{\rho} \frac{dh_1}{dt},$$

zodat we het systeem door een bergingscoëfficiënt

$$B = \frac{\rho g V}{\rho}$$

kunnen kenmerken.

Treedt in een systeem waarin vloeistoffen circuleren de samen-drukbaarheid merkbaar aan den dag, dan moet ook iedere met vloeistof ge-vulde ruimte als een bergend element beschouwd worden. Is K_c de compres-sie modulus van de vloeistof, dan is

$$B = \frac{\rho g V}{K_c}$$

de berging van een ruimte met inhoud V .

Wanneer in een bergend systeem de weerstanden en traagheden niet te verwaarlozen zijn, dan kan het systeem veelal schematisch worden opgevat als een fictief bergingselement in serie met een fictief weer-stands- en een fictief traagheids-element.

Op soortgelijke wijze als voor gekoppelde traagheids-elementen, kan nu voor bergingselementen het volgende worden afgeleid:

Twee bergingselementen met bergingen B_1 en B_2 werken bij parallel-koppeling als een bergingselement met de berging

$$(28) \quad B = B_1 + B_2.$$

Bij parallel-koppeling dienen bergingen dus, evenals doorlatingen, te wor-den opgeteld.

Bij koppeling in serie werken de twee bergingselementen als één element met een berging die uit

$$(29) \quad \frac{1}{B} = \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}$$

volgt.

In systemen waarin twee of meer vloeistoffen met verschillende dichtheden ρ_1, ρ_2, \dots circuleren, kunnen ook bergingselementen van het type van fig. 10 voorkomen. In zulke systemen met meer dan één vloeistof is het gewenst de piëzometrische hoogten alle te herleiden tot overeenkomstige piëzometrische hoogten in één vloeistof, volgens de formule

$$h_1 = \frac{\rho_1}{\rho_0} y_1,$$

waarin y_1 de piëzometrische hoogte in de vloeistof met dichtheid ρ_1 is, en h_1 de daarmee overeenkomende herleide piëzometrische hoogte in een vloeistof met de dichtheid ρ_0 . Voor ρ_0 kan de dichtheid van één der

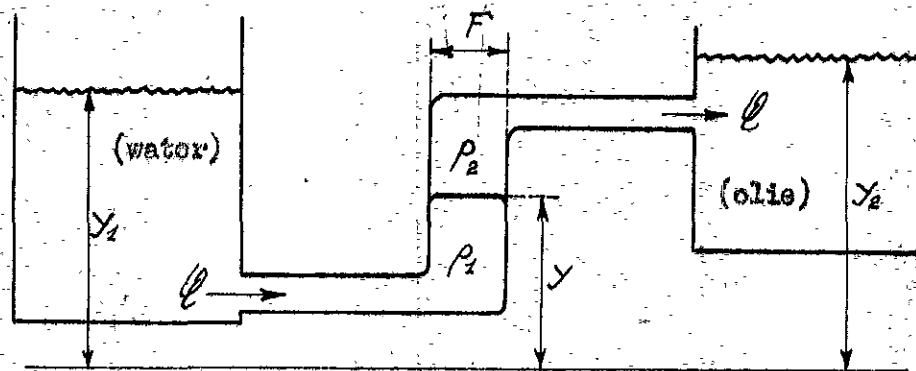


FIG. 10.

vloeistoffen in het systeem worden gekozen, doch ook een willekeurige dichtheid. Nu is in het systeem van fig. 10 de druk in beide vloeistoffen op het grensvlak dezelfde en dus: $\rho_1 g (y_1 - y) = \rho_2 g (y_2 - y)$.

Hieruit volgt

$$y = \frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_2} (h_1 - h_2).$$

Voor de stroom door het systeem geldt

$$Q = F \frac{dy}{dt},$$

en dus

$$Q = B \frac{d(h_1 - h_2)}{dt},$$

waarin

$$B = \frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_2} F$$

de berging van het systeem is.

Het systeem van fig. 8 is als een bijzonder geval van dat van fig. 10 op te vatten waarbij $\rho_2 = 0$ en dus ook $h_2 = 0$ is. Het systeem van fig. 5 of dat van fig. 6 is op te vatten als een serie-koppeling van twee elementen van het type van fig. 10. Inderdaad is de berging van het systeem

van fig. 9 of van dat van fig. 6 uit die van het systeem van fig. 10 af te leiden door $\rho_0 = \rho$ te stellen en (29) toe te passen.

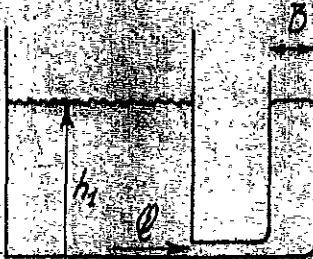


FIG. 8

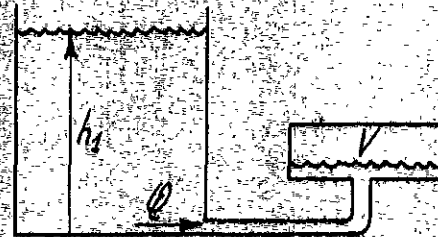


FIG. 9

5. Complexe impedanties en admittanties.

We gaan nu over tot het bestuderen van het gedrag van weerstands-, traagheids-, en bergingselementen bij sinusvormig wisselende vervallen en stromen.

Een willekeurige veranderende grootte kan steeds door middel van Fourier-analyse herleid worden tot een som van zuiver sinusvormige veranderingen. Het is ons hier slechts om het ontwikkelen van beginselen te doen, en daarom zullen we ons beperken tot een bespreking van zuiver sinusvormig met de tijd veranderende vervallen en stromen. In verband hiermee beperken we ons wat de weerstandselementen betreft, tot de lineaire.

Laten we b.v. een sinusvormig veranderende stroom beschouwen:

$$(30) \quad \varphi = \hat{\varphi} \cos (\omega t + \psi).$$

Deze stroom is afwisselend positief en negatief met een grootste waarde $\hat{\varphi}$, en een kleinste waarde $-\hat{\varphi}$. De grootte $\hat{\varphi}$ is de "amplitude" van de stroom. Als $t = -\frac{\psi}{\omega}$ is, dan is $\omega t + \psi = 0$ en dan is $\hat{\varphi}$ juist maximaal. De grootte ψ , de "fasehoek", bepaalt dus het tijdstip waarop $\hat{\varphi}$ maximaal is. Noemt t met een bedrag $\frac{2\pi}{\omega}$ toe, dan neemt $\omega t + \psi$ met 2π toe, en dan vinden we voor $\hat{\varphi}$ weer dezelfde waarde als voor het verstrijken van de tijd $\frac{2\pi}{\omega}$, daar $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$ is. De tijd $\frac{2\pi}{\omega}$ wordt de "periode" genoemd. De grootte ω tenslotte, wordt de "hoekfrequentie" genoemd, en deze kan b.v. worden uitgedrukt in rad sec^{-1} . Grote waarden van ω komen overeen met kleine periodes en dus snelle wisselingen, en kleine waarden van ω komen overeen met grote periodes, dus langzame wisselingen.

Op soortgelijke wijze kunnen we ook een sinusvormig veranderend verval,

$$(31) \quad h_1 - h_2 = \hat{h} \cos (\omega t + \varphi)$$

beschouwen. Hier stelt \hat{h} de amplitude, φ de fasehoek, en ω weer de hoekfrequentie voor.

Bij een zuiver weerstandselement is de stroom op ieder ogenblik bepaald door de grootte van het verval op dat ogenblik, en omgekeerd. We hebben dus b.v. voor het verval volgens (2):

$$h_1 - h_2 = R \hat{\varphi} \cos (\omega t + \psi).$$

Vergelijking met (31) leert ons dat

$$\varphi = \psi \text{ en } h = R \hat{Q}$$

is. Het verval en de stroom zijn dus in fase met elkaar, d.w.z. dat zij gelijktijdig hun maximale waarde bereiken. Het quotient van de amplituden van het verval en van de stroom is verder R . In deze betrekkingen komt de hoekfrequentie ω niet voor, en zij zijn dus van de hoekfrequentie onafhankelijk.

Uit (3) zouden we op overeenkomstige wijze $\varphi = \psi$ en $\hat{Q} = G \hat{h}$ hebben kunnen vinden, waaruit dezelfde conclusies getrokken kunnen worden.

Laten we nu een traagheidselement beschouwen. We substituëren dus (30) in (16) en dit geeft volgens de regels voor het differentiëren:

$$h_1 - h_2 = -\omega M \hat{Q} \sin(\omega t + \psi).$$

Dit kunnen we volgens de formule $-\sin \alpha = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$ herleiden tot:

$$h_1 - h_2 = \omega M \hat{Q} \cos(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2})$$

Vergelijking met (31) geeft dan

$$\varphi = \psi + \frac{\pi}{2} \text{ en } \hat{h} = \omega M \hat{Q}.$$

Hieruit volgt ten eerste dat het verval $\frac{\pi}{2}$ rad, dus 90° in fase voor is bij de stroom, d.w.z. dat het verval een kwart van de periode eerder maximaal wordt dan de stroom.

Verder blijkt dat de amplitude van het verval evenredig is met de stroom, doch ook dat het verval evenredig is met de hoekfrequentie. Uit dit laatste is een belangrijke kwalitatieve gevolgtrekking te maken:

Snel wisselende stromen, (dus stromen waarbij ω groot is) geven bij doorgang door een traagheidselement grotere vervallen dan even grote langzaam wisselende stromen.

En omgekeerd: Langzaam wisselende vervallen over een traagheidselement geven grotere stromen dan even grote snel wisselende vervallen.

Bij een bergingselement treffen we juist het tegendeel van de eigenschappen van een traagheidselement aan. Dit is af te leiden door (31) in (26) te substituëren, waaruit volgt:

$$Q = -\omega B \hat{h} \sin(\omega t + \varphi) = \omega B \hat{h} \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}).$$

Dus:

$$\varphi = \varphi + \frac{\pi}{2} \text{ en } Q = \omega B \hat{h}.$$

Hier is derhalve juist de stroom in fase voor bij het verval, en de stroom is nu evenredig niet alleen met \hat{h} maar ook met ω . Hieruit volgt dan:

Snel wisselende vervallen over een bergingselement geven grotere stromen dan even grote langzaam wisselende vervallen, en:

Langzaam wisselende stromen geven bij doorgang door een bergingselement grotere vervallen dan even grote snel wisselende stromen.

Een andere, en voor verdere ontwikkeling meer geschikte behandeling is die, waarbij van exponentiële in plaats van goniometrische functies gebruik gemaakt wordt. Dit is mogelijk aan de hand van de analytische formules

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{en} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

waardoor de goniometrische in de exponentiële functies worden uitgedrukt, of van de formules

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{en} \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

waardoor de exponentiële in de goniometrische functies worden uitgedrukt.

Daar de sinus- en cosinusfuncties voor reële waarden van x zelf ook reëel zijn, kan voor reële waarden van x bovendien ook nog

$$\cos x = \operatorname{re} e^{ix} \quad \text{en} \quad \sin x = \operatorname{im} e^{ix}$$

geschreven worden, waarbij re betekent dat het reële, en im dat het imaginaire deel van de daarachterstaande complexe grootte genomen moet worden.

Zo kan dus nu voor (26)

$$Q = \operatorname{re} \hat{Q} e^{i\omega t + i\varphi} = \operatorname{re} \hat{Q} e^{i\varphi} e^{i\omega t}$$

geschreven worden, of, als we een grootte Q volgens

$$Q = \hat{Q} e^{i\varphi}$$

invoceren, ook

$$(32) \quad Q = \operatorname{re} \hat{Q} e^{i\omega t}$$

Evenzo krijgen we in plaats van (25)

$$(33) \quad h_1 - h_2 = \operatorname{re} h e^{i\omega t},$$

waarin

$$h = \hat{h} e^{i\varphi}$$

is. De grootte Q , respectievelijk h , wordt de "complexe amplitude"

van φ , respectievelijk h genoemd. De modulus van de complexe amplitude is dan de amplitude, en het argument is de fasehoek. De complexe amplitude is dus als het ware een samenvatting van de amplitude en de fasehoek.

Een aanschouwelijke voorstelling van de formules met de exponentiële functies kan verkregen worden door gebruik te maken van de meetkundige voorstelling van de complexe getallen:

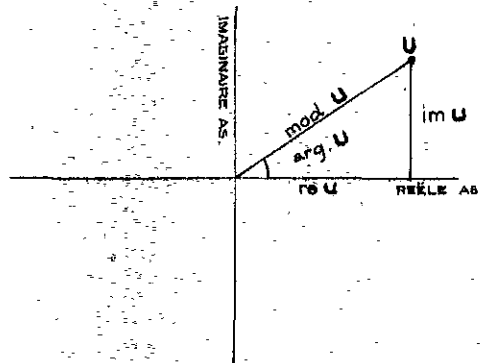


FIG. 11.

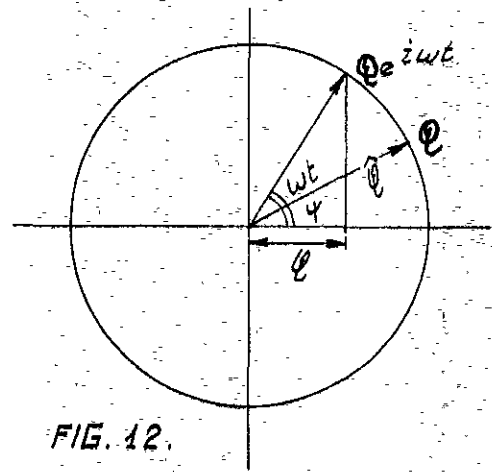


FIG. 12.

Een complex getal U kan meetkundig worden voorgesteld door een vector in een plat vlak. Deze vector wordt gevonden door het reële en het imaginaire deel van het getal, $re U$ en $im U$, als abscis en ordinaat van het uiteinde der vector uit te zetten (fig. 11). De lengte van de vector stelt dan de modulus voor, $mod U$, en de hoek die de vector met de reële as maakt, stelt het argument, $arg U$, voor. We brengen nog in herinnering dat een complex getal door

$$U = re U + i im U$$

in zijn reëel en imaginair deel, en door

$$U = |U| e^{i arg U}$$

in zijn modulus ($|U| = mod U$) en argument kan worden uitgedrukt.

Zo is dus φ de modulus van φ , en γ is het argument ervan. Door de hoek γ , en de afstand φ uit te zetten in het complexe vlak (fig. 12) vinden we dus de vector die φ voorstelt. De grootheid $\varphi e^{i\omega t}$ heeft dezelfde modulus als φ , doch een argument dat ωt groter is. De vector die de grootheid $\varphi e^{i\omega t}$ voorstelt, wordt dus verkregen door de vector voor φ over een hoek ωt te draaien (fig. 12). Bij aangroei van t zal

de vector voor $Q e^{i\omega t}$ dus steeds verder draaien, d.w.z. dat deze vector met de constante hoeksnelheid ω om de oorsprong draait. Nu is Q het reële deel van $Q e^{i\omega t}$, en dit wordt voorgesteld door de projectie van de vector voor $Q e^{i\omega t}$ op de reële as. Wanneer die vector nu ronddraait, dan neemt de projectie toe en af juist volgens de sinusfunctie in (30).

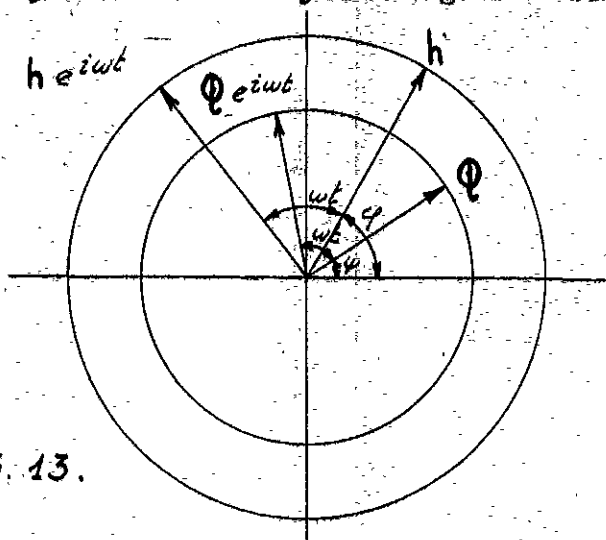


FIG. 13.

Zetten we op dezelfde wijze ook vectoren voor h en $h e^{i\omega t}$ uit (fig. 13), dan zal, daar de hoeksnelheid waarmee de vectoren $Q e^{i\omega t}$ en $h e^{i\omega t}$ draaien dezelfde is, de hoek tussen die twee vectoren ook steeds dezelfde blijven, en gelijk aan de hoek tussen de vectoren h en Q . Deze hoek geeft het faseverschil tussen het verval en de stroom weer.

We gaan nu, om de gedachtegang te ontwikkelen, als voorbeeld een traagheids-element beschouwen, waar een sinusvormig wisselende stroom met de hoekfrequentie ω doorheen gaat. Substitutie van (32) in (16) geeft dan:

$$h_1 - h_2 = M \frac{d}{dt} [\text{re } Q e^{i\omega t}]$$

De bewerkingen $\frac{d}{dt}$ en re mogen in dit geval verwisseld worden (en wel omdat $Q e^{i\omega t}$ een analytische functie is). We krijgen dus

$$h_1 - h_2 = M \text{re} \frac{d}{dt} [Q e^{i\omega t}] = M \text{re} [i\omega Q e^{i\omega t}],$$

en daar M reëel is, mogen we hiervoor ook

$$h_1 - h_2 = \text{re} [i\omega M Q e^{i\omega t}]$$

schrijven. Vergelijking met (33) leert ons dan:

$$h = i\omega M Q.$$

Dit betekent ten eerste dat er tussen de moduli van h en Q een vaste verhouding bestaat,

$$\frac{|h|}{|Q|} = \frac{\hat{h}}{\hat{Q}} = \omega M,$$

dit evenwel nog verschillend is voor verschillende frequenties. Ten tweede betekent het vermenigvuldigen met de imaginaire eenheid i , dat het argument met $\frac{\pi}{2}$ vergroot wordt. De onderlinge ligging van de vectoren voor h en Q , en dus ook de onderlinge ligging van de vectoren voor $h e^{i\omega t}$ en $Q e^{i\omega t}$, is dus als aangegeven in fig. 14. De vectoren staan loodrecht op elkaar, zodanig dat de vector $h e^{i\omega t}$ eerder door de positieve reële as gaat dan de vector $Q e^{i\omega t}$. Dit betekent dat het verval in fase voor is bij de stroom, juist wat we reeds eerder vonden.

Op overeenkomstige wijze als voor een traagheids-element, kan voor een bergingselement

$$Q = i\omega B h$$

worden afgeleid. De vectoren h en Q liggen dan als in fig. 15 is aangegeven.

Verder kan voor een weerstandselement gemakkelijk aangetoond worden dat we

$$h = R Q \quad \text{of} \quad Q = G h$$

krijgen. De vectoren h en Q hebben dan dezelfde richting, zoals is aangegeven in fig. 16.

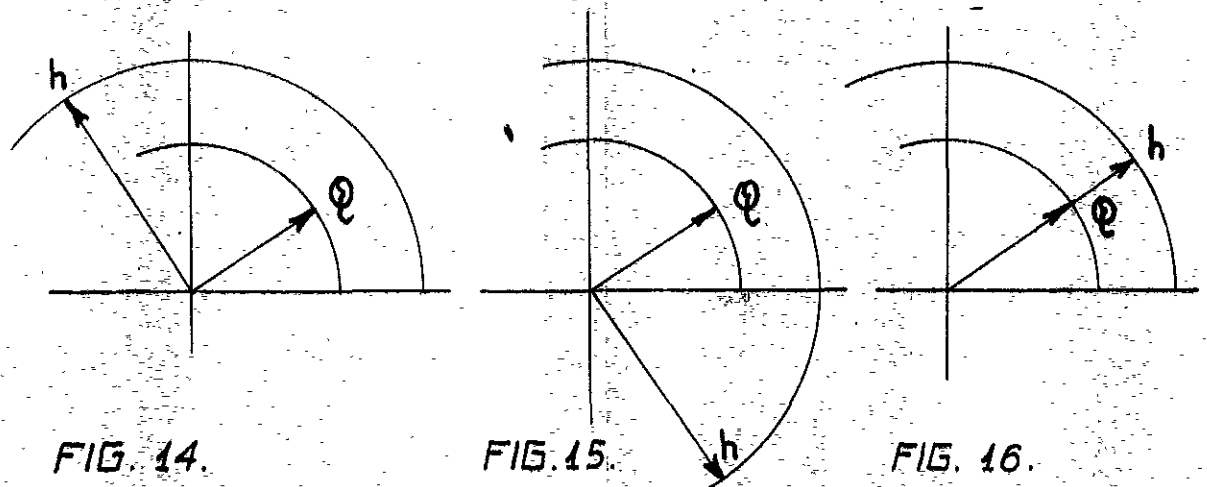


FIG. 14.

FIG. 15.

FIG. 16.

Traagheids-, bergings-, en weerstands- of doorlatings-elementen zullen we samenvatten onder de naam "impedantie-elementen" of "admittantie-elementen". In het algemeen zullen we onder een "lineair impedantie-element" een systeem verstaan, dat onder invloed van sinusvormig wisselende verval- len, ook sinusvormig wisselende stromen doorlaat, en wel zodanig dat bij iedere bepaalde hoekfrequentie een bepaalde (in het algemeen complexe)

verhouding bestaat tussen de complexe amplituden van verval en stroom.

Onder de "complexe impedantie" van het systeem verstaan we dan het quotiënt

$$(34) \quad Z = \frac{h}{Q},$$

en onder de "complexe admittantie" het quotiënt

$$(35) \quad Y = \frac{Q}{h}$$

Impedantie en admittantie zijn dus elkaars omgekeerde.

Impedanties en admittanties zijn in het algemeen nog functies van de hoekfrequentie ω , d.w.z. dat zij voor snel wisselende bewegingen andere waarden hebben dan voor langzaam wisselende bewegingen.

Uit de voorgaande afleidingen volgt nu dat we aan een traagheids-element een impedantie of admittantie

$$(36) \quad Z = i\omega M \quad \text{of} \quad Y = \frac{1}{i\omega M}$$

kunnen toekennen. Evenzo hebben we voor een bergingselement

$$(37) \quad Z = \frac{1}{i\omega B} \quad \text{of} \quad Y = i\omega B,$$

en voor een weerstands- of doorlatingselement

$$(38) \quad Z = R \quad \text{of} \quad Y = G$$

We beschouwen nu twee impedantieelementen die in serie gekoppeld zijn. Laat Z_1 de impedantie van het eerste, en Z_2 die van het tweede element zijn. Door beide gaat dezelfde stroom $Q = \text{re } Q e^{i\omega t}$, en dus zijn de vervallen:

$$\Delta h_1 = \text{re } Z_1 Q e^{i\omega t}$$

en

$$\Delta h_2 = \text{re } Z_2 Q e^{i\omega t}$$

Het totale verval is dan

$$\begin{aligned} \Delta h &= \Delta h_1 + \Delta h_2 = \text{re } (Z_1 Q e^{i\omega t}) + \text{re } (Z_2 Q e^{i\omega t}) \\ &= \text{re } (Z_1 + Z_2) Q e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

De twee elementen in serie geven dus hetzelfde verval als één element met de impedantie

$$(39) \quad Z = Z_1 + Z_2.$$

Bij in serie gekoppelde impedantieelementen dienen dus de impedanties opgeteld te worden, evenals de weerstanden bij in serie gekoppelde weerstandselementen.

Op soortgelijke wijze is nu voor twee parallel gekoppelde impedantie-elementen met de admittanties

$$Y_1 (= 1/Z_1) \text{ en } Y_2 (= 1/Z_2) \quad , \text{ af te leiden:}$$

$$(40) \quad Y = Y_1 + Y_2$$

Bij parallel gekoppelde impedantie-elementen dienen dus de admittanties opgeteld te worden, evenals de doorlatingen bij parallel gekoppelde weerstandselementen.

De regels (5), (6), (22), (23), (28), en (29) zijn nu ook gemakkelijk met behulp van (36), (37), en (38) uit (39) en (40) af te leiden.

Verder volgt hieruit nu b.v. ook, dat de impedantie van een traagheids-element M in serie met een weerstandselement R door

$$Z = R + i\omega M$$

wordt weergegeven. Deze impedantie heeft een volstrekte waarde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 M^2},$$

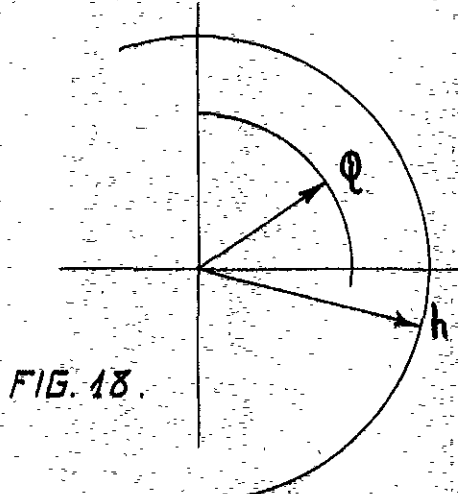
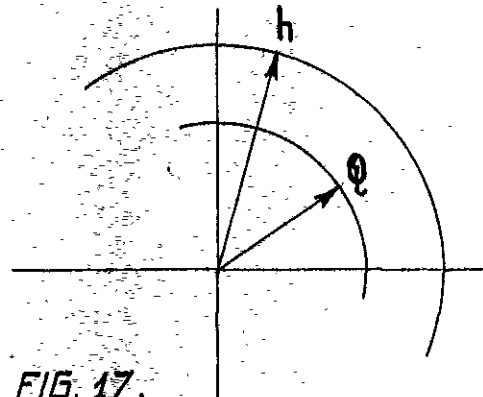
d.w.z. dat de amplituden van verval en stroom zich verhouden als

$$\frac{h}{\varrho} = |Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 M^2}.$$

Het argument van Z is bepaald door

$$\text{tang arg } Z = \frac{\omega M}{R},$$

en arg Z zal dus met een hoek tussen 0 en $\frac{\pi}{2}$ rad (0 en 90°) overeenkomen. De onderlinge ligging van de vectoren voor h en ϱ is dus als in fig. 17 is aangegeven. Indien ω klein wordt (langzame wisselingen), dan nadert



Z tot R , en dan wordt de hoek tussen de vectoren voor h en ϱ klein. Wordt ω groot (snelle wisselingen), dan nadert Z tot $i\omega M$, en

dan nadert de hoek tussen de twee vectoren tot $\frac{\pi}{2}$ rad (90°).

Op soortgelijke wijze is voor de admittantie van een bergingselement dat parallel gekoppeld is met een doorlatingselement,

$$Y = G + i\omega B$$

af te leiden. Voor deze parallel- koppeling gelden soortgelijke overwegingen als voor de serie- koppeling van een traagheids- en een weerstandselement, doch nu is de stroom in fase voor bij het verval (fig. 18). Bij kleine waarden van ω (langzame wisselingen) nadert Y tot G en overweegt dus weer de invloed van het weerstandselement. Bij grote waarden van ω (snelle wisselingen) nadert Y tot $i\omega B$ en overweegt dus de invloed van het bergingselement.

Bij een parallel- koppeling van een traagheids- en een weerstandselement is de admittantie

$$Y = G + \frac{1}{i\omega M} = G - \frac{i}{\omega M}$$

De onderlinge ligging van de vectoren voor h en Q is nu weer als in fig. 17, doch nu zal bij langzame wisselingen (ω klein) juist de invloed van het traagheidselement overheersen, daar Y dan tot $\frac{1}{i\omega M}$ nadert, en de invloed van het weerstandselement zal juist overwegen bij snelle wisselingen (ω groot) waarbij Y tot G nadert.

Bij een serie- koppeling van een bergings- en een weerstandselement is de impedantie

$$Z = R + \frac{1}{i\omega B} = R - \frac{i}{\omega B}$$

De onderlinge ligging der vectoren voor h en Q is weer als in fig. 18, doch, evenals bij het hiervoor genoemde systeem, zal de invloed van het weerstandselement bij snelle wisselingen (ω groot) overheersen, terwijl de invloed van het bergingselement bij langzame wisselingen (ω klein) zal overheersen.

Het impedantiebegrip kan nog op verschillende wijzen verder ontwikkeld worden, b.v. door het gedrag bij niet- sinusvormige wisselingen te gaan onderzoeken, of door systemen met meer dan twee ingangen te beschouwen. Wij zullen daar echter niet verder op in gaan, daar het hier slechts onze bedoeling is de hoofdlijnen te trekken.

6. Trillingsfilters.

Een "trillingsfilter" is een systeem voor overdracht van trillingen (slingeringen) op zodanige wijze, dat trillingen met frequenties in bepaalde frequentieintervallen volkomen of grotendeels worden overgedragen, terwijl trillingen met andere frequenties niet of slechts in geringe mate worden doorgelaten. De frequentieintervallen waarin overdracht plaats vindt, worden "doorlaatgebieden" genoemd.

Onder een "laag doorlatend" filter wordt een systeem verstaan dat beneden een zekere grensfrequentie wel overdraagt, en daarboven niet. Zulk een filter dient dus om snelle wisselingen tegen te houden, doch langzame wisselingen ongehinderd door te laten.

Onder een "hoog doorlatend" filter wordt een systeem verstaan dat boven een zekere grensfrequentie wel overdraagt, en daaronder niet. Zulk een filter dient dus om langzame wisselingen tegen te houden, en snelle wisselingen ongehinderd te laten passeren.

Onder een "band doorlatend" filter wordt een systeem verstaan dat tussen twee grensfrequenties wel overdraagt, doch daarbuiten niet. Wordt de benedenste grensfrequentie nul, dan gaat het filter in een laag doorlatend filter over. Wordt daarentegen de bovenste grensfrequentie oneindig groot, dan gaat het filter in een hoog doorlatend filter over.

Een ideaal filter laat in de doorlaatgebieden de trillingen volkomen door, en buiten die gebieden laat zulk een filter niet door. In feite zal een filter altijd nog enige demping in de doorlaatgebieden geven, en ook buiten de eigenlijke doorlaatgebieden nog wel enigzins doorlaten. Hoe scherper het filter discrimineert tussen de doorlaatgebieden en de andere gebieden, des te beter is de kwaliteit van het filter.

In de elektrotechniek, in het bijzonder in de radio- en telefoontechniek, wordt een zeer veelvuldig en soms gecompliceerd gebruik van trillingsfilters gemaakt. Op dit terrein is dan ook reeds veel studie van de frequentiefilters gemaakt. 3) Door de analogieën is het mogelijk

3) Pol, A van der, en T.J. Weijers, Electrische Filters, Philips Technisch tijdschrift, 1936, p. 239 e.v.

hiervan gebruik te maken bij het ontwerpen van mechanische, akoustische en hydraulische trillingsfilters.

De mogelijkheid tot toepassing van trillingsfilters in de hydraulika is veel minder groot dan in de elektrotechniek. Het toepassingsgebied in de hydraulika, in het bijzonder voor meetinstrumenten, is echter wel zó groot, dat het naar onze mening de moeite loont de principes van zulke filters aan een nadere beschouwing te onderwerpen.

Om de werking van een trillingsfilter te begrijpen moet men de in par. 5 afgeleide regels in het oog houden: 1^o. De vervallen over een bergingselement zijn in verhouding tot de doorgelaten stromen kleiner naarmate de frequentie waarmee de vervallen en stromen variëren, hoger is; 2^o. De vervallen over een traagheidselement zijn in verhouding tot de doorgelaten stromen groter naarmate de frequentie hoger is. De eerste regel geldt ook voor een bergingselement van het type van fig. 8, indien we voor "vervallen over", "drukhoogten aan de mond van", en voor "doorgelaten stromen", "opgenomen stromen" lezen.

Laten we bijvoorbeeld het systeem van fig. 19 beschouwen. In het linkervat gaat de waterspiegel door een niet verder ter zake doende oorzaak op en neer. Het peil in dit vat wordt door middel van de als traagheidselement op te vatten buis M overgedragen op het rechter vat.

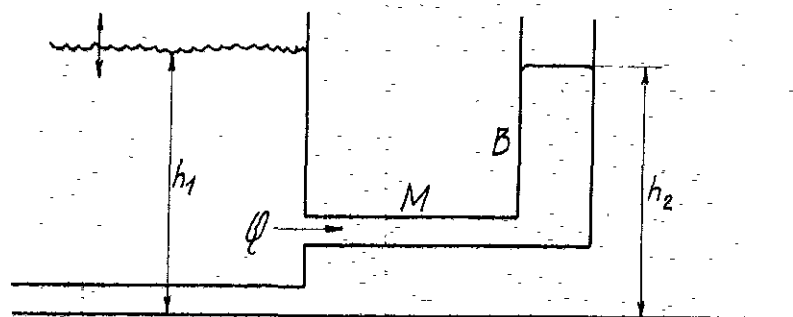


FIG. 19.

Dit vat kan b.v. bedoeld zijn als open manometerbuis voor het aflezen van het peil in het linkervat. Het rechtervat heeft een bergend oppervlak B . De combinatie van het traagheidselement M en het bergingsele-

ment B zal nu, zoals we aanstonds zullen aantonen, als een laag doorlatend filter werken, zodat h_2 in het rechtervat de langzame veranderingen van het niveau h_1 in het linkervat wel, doch de snelle veranderingen niet volgt.

De filter-werking van het M, B -systeem is door de volgende redening al reeds terstond in te zien: Bij lage frequenties, dus langzame veranderingen in h_1 , zal het rechtervat, ook al volgt het niveau h_1 het niveau h_2 op de voet, slechts betrekkelijk kleine stromen opnemen (zie regel 1, hiervoor). Bij lage frequenties zal bovendien de verbindingsbuis M slechts betrekkelijk geringe vervallen geven in verhouding tot de door te laten stromen (regel 2). Daar die stromen dan al betrekkelijk klein zijn, zullen dus slechts kleine vervallen $h_1 - h_2$ ontstaan, d.w.z. dat het niveau h_2 het niveau h_1 vrijwel op de voet zal volgen.

Bij hoge frequenties daarentegen, laat het element M in verhouding tot het verval slechts geringe stromen door (regel 2). Bovendien zou het element B voor de volledige vulling en lediging bij het op de voet volgen van het niveau h_1 , juist naar verhouding grote stromen vragen (regel 1), en nu het element M slechts geringe stromen doorlaat, zullen vulling en lediging dus nagenoeg achterwege blijven. Bij hoge frequenties, dus snelle veranderingen in h_1 , zal h_2 dus nagenoeg van h_1 onafhankelijk blijven. We zullen dit nu mathematisch nader onderzoeken:

Laat h_1 sinusvormig in de tijd veranderen met een hoekfrequentie ω . Dan zal ook het niveau h_2 sinusvormig gaan veranderen, en ook het verloop van de stroom φ die van het eerste naar het tweede vat loopt, zal dan sinusoidaal zijn. Voor het bergingselement zal dan

$$\varphi = i\omega B h_2$$

gelden, en voor het traagheidsselement

$$h_1 - h_2 = i\omega M \varphi,$$

waarin h_1 , h_2 en φ de complexe amplituden van de veranderingen in h_1 ,

h_2 en ϱ zijn. Combinatie van deze twee vergelijkingen geeft:

$$h_1 = h_2 (1 - \omega^2 MB)^{-1}$$

De verhouding van de amplituden is dus

$$\frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1} = \text{mod} \frac{h_2}{h_1} = \text{mod} \frac{1}{1 - \omega^2 MB} = \frac{1}{|1 - \omega^2 MB|}$$

Voor waarden van ω die klein zijn t.o.v. $\omega_0 = 1/\sqrt{MB}$ (ω_0 is de resonantiehoekfrequentie, waarover aanstonds meer), is $\omega^2 MB$ zeer klein t.o.v. 1 en dus $\hat{h}_2 : \hat{h}_1 \approx 1$ en wel iets groter dan 1. Voor waarden van ω die groot zijn t.o.v. ω_0 , daarentegen, is $\omega^2 MB$ veel groter dan 1, en $\hat{h}_2 : \hat{h}_1$ dus veel kleiner dan 1. Dit betekent dat het niveau h_2 de veranderingen in h_1 met hoekfrequenties die klein zijn t.o.v. ω_0 nagenoeg welkomen volgt, en dat de veranderingen met hoekfrequenties die groot zijn t.o.v. ω_0 nagenoeg niet tot het rechtvert doordringen.

Komt de hoekfrequentie ω in de buurt van ω_0 , dan wordt $\omega^2 MB$ bijna 1, en dan wordt $\hat{h}_2 : \hat{h}_1$, en dus \hat{h}_2 zeer groot. Voor $\omega = \omega_0$ zou \hat{h}_2 volgens de afgeleide formule zelfs oneindig worden, doch in werkelijkheid zal \hat{h}_2 zeker eindig blijven, daar er altijd in het systeem weerstanden zijn, die een onbepaald aangroei van de amplitude \hat{h}_2 beletten. Het groot worden van de amplitude \hat{h}_2 wordt resonantie genoemd, en de hoekfrequentie ω_0 , waarbij dit geschiedt, wordt daarom de "resonantiehoekfrequentie" genoemd.

Het verloop van $\hat{h}_2 : \hat{h}_1$ als functie van ω is grafisch voorgesteld door kromme 1 in fig. 20, die uit twee takken bestaat, één voor de hoekfrequenties beneden ω_0 , en de ander voor de hoekfrequenties boven ω_0 .

Voert nu het niveau h_1 een gecombineerde beweging uit die bestaat uit sinusoidale bewegingen, gedeeltelijk met hoekfrequenties die veel kleiner zijn dan ω_0 , gedeeltelijk met hoekfrequenties die veel groter zijn dan ω_0 , dan zal het niveau de langzame bewegingen ($\omega < \omega_0$) van h_1 wel volgen, doch de snelle bewegingen ($\omega > \omega_0$) niet. Het systeem werkt dus als een laag doorlatend filter. Het heeft echter geen scherpe grensfrequentie, doch een breed grensgebied waarin de verhou-

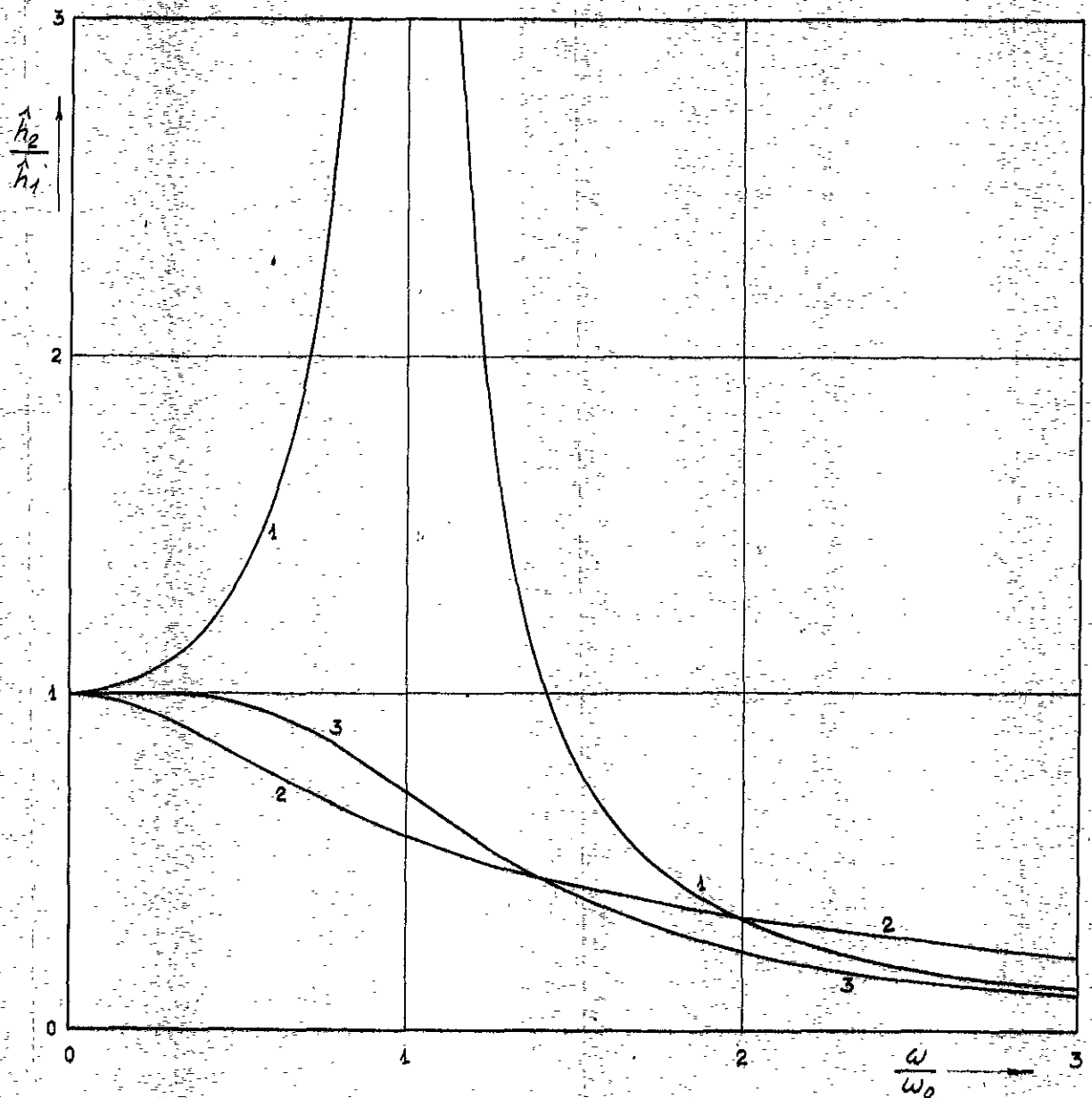


FIG. 20.

ding $\hat{h}_2 : \hat{h}_1$ noch dicht bij 1, noch dicht bij 0 ligt. Kent ω in de buurt van ω_0 , dan wordt $\hat{h}_2 : \hat{h}_1$ zelfs zeer groot, en dus sterk afwijkend, zowel van de waarde 1 als van de waarde 0.

Wordt de verbindingsbuis zo gedimensioneerd dat bij de in aanmerking komende hoekfrequenties niet de traagheid M , doch de weerstand R kenmerkend is, dan kunnen we het systeem opvatten als een koppeling van een weerstandselement en een bergingselement. Ook dan zal het systeem wel als filter werken, doch minder effectief dan een M, B -systeem. Dit volgt hieruit dat de filterwerking van het M, B -systeem gedeeltelijk berust op de regel dat een traagheids-element in verhouding

tot het verval minder stroom doorlaat naarmate de frequentie hoger is. Bij een R, B - systeem vervalt dit effect, daar een weerstandselement in verhouding tot het verval bij alle frequenties even grote stromen doorlaat.

De minder goede werking van het R, B - systeem blijkt duidelijk uit kromme 2 van fig. 20, die de verhouding $\hat{h}_2 : \hat{h}_1$ als functie van ω weergeeft. De waarde van R is zo gekozen, dat de afwijking van $\hat{h}_2 : \hat{h}_1$ van de waarde 1 voor kleine frequenties gelijk wordt aan de afwijking bij het M, B - systeem, (de afwijking bij het R, B - systeem is echter naar beneden, die bij het M, B - systeem naar boven). Bij de hoge frequenties geeft het R, B - systeem dan een veel kleinere demping dan het M, B - systeem, d.w.z. dat het minder effectief werkt, daar de hoge frequenties door een laag doorlatend filter juist tegengehouden behoren te worden. Een andere keuze van R geeft geen essentiële verandering in het gedrag van het systeem, daar dat alleen neerkomt op een andere schaal voor ω .

Een belangrijke verbetering wordt verkregen als de verbindingsbuis zo gedimensioneerd wordt, dat zowel weerstand als traagheid van belang zijn, en wel bij voorkeur zo dat $R = \sqrt{2MB}$ wordt. Het systeem werkt dan bij hoge frequenties ongeveer gelijk aan het M, B - systeem en zelfs nog iets beter, en bij de lage frequenties wordt ook een belangrijke verbetering verkregen zowel ten opzichte van het M, B - systeem, als ten opzichte van het R, B - systeem. Bovendien is dan de resonantiepiek van het M, B - systeem verdwenen, wat trouwens ook bij het R, B - systeem het geval is. Dit alles wordt aanschouwelijk voorgesteld door kromme 3 in fig. 20.

Een scherpe discriminatie tussen de door te laten en de tegen te houden frequenties kan bereikt worden door een aantal combinaties van bergende en trage elementen achter elkaar te koppelen, zoals aangegeven is in fig. 21. Deze aaneenkoppeling van bergende en trage elementen is op te vatten als een voortdurende herhaling van zogenaamde "halve oellen", als afgebeeld in fig. 22, steeds om en om in de volgorde MB en in de

volgorde BM .

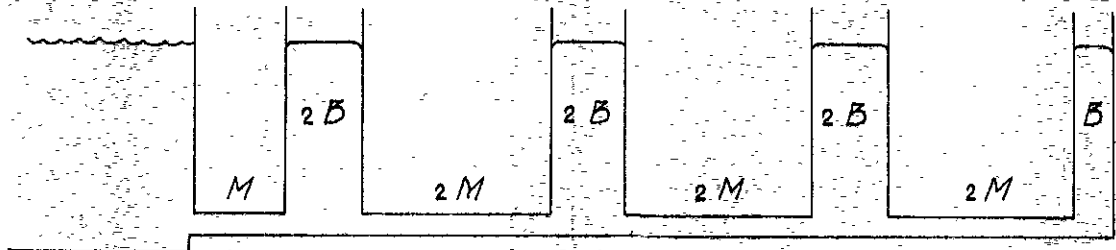


Fig. 21.

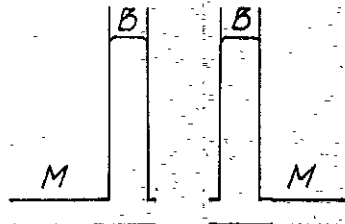


Fig. 22.

Waar twee bergende elementen met berging B aan elkaar sluiten, kunnen ze worden gecombineerd tot één element met berging $2B$, en waar twee trage elementen met traagheid M aan elkaar sluiten, kunnen ze worden gecombineerd tot één element met traagheid $2M$. Aldus ontstaat het systeem van fig. 21.

De systemen van fig. 19 en 21 zijn opgebouwd met bergingselementen van het type van fig. 8. Het is mogelijk trillingsfilters op te bouwen met bergingselementen van het type van fig. 5 en 6. Zo werkt het systeem van fig. 23 op dezelfde wijze als het systeem van fig. 21. De bergingselementen zijn enerzijds gekoppeld met de traagheidselementen, en anderzijds met een vat met constant (of nagenoeg constant) niveau h_0 .

De bergende elementen in een laag doorlatend filter zijn met elkaar parallel gekoppeld, zij het dan ook door tussenkomst van de trage elementen. De trage elementen zijn met elkaar in serie gekoppeld.

Omgekeerd wordt een hoog doorlatend filter verkregen wanneer men de bergende elementen in serie met elkaar plaatst, en daartussen de trage elementen parallel met elkaar aftakt, en deze met hun andere uit-

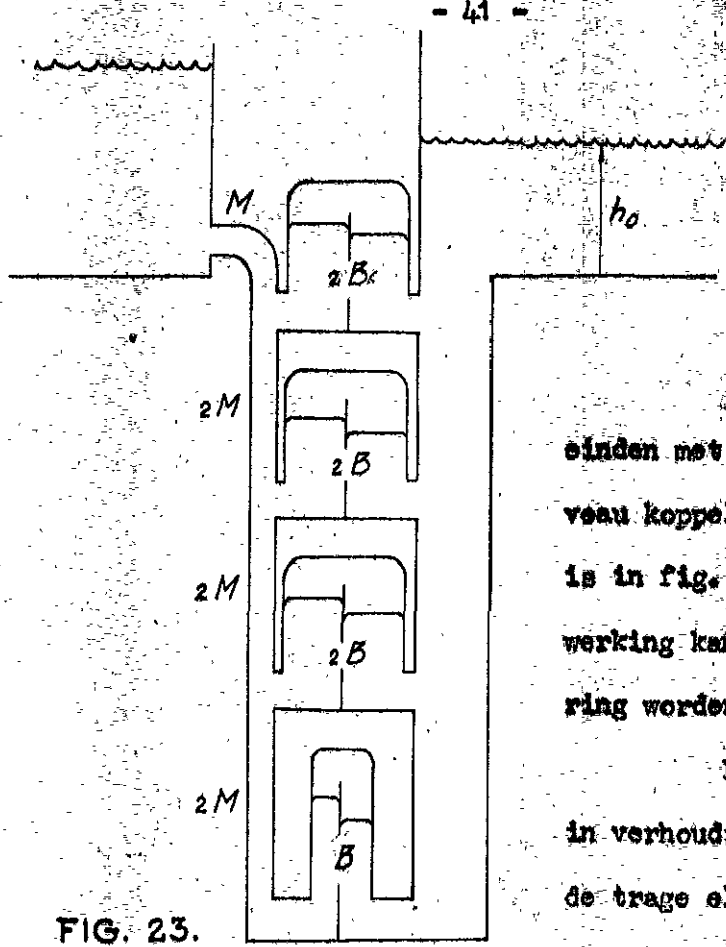


FIG. 23.

einden met een vat met constant niveau koppelt. Een dergelijk systeem is in fig. 24 voorgesteld. De filterwerking kan door de volgende redenering worden ingezien:

Bij hoge frequenties (hoog in verhouding tot \sqrt{BM}), zullen de trage elementen, ook al volgen de vervallen tussen de bergende elementen

ten de niveauperanderingen links op de voet, slechts geringe stromen nemen. Aangesien de bergende elementen bij hoge frequenties relatief grote stromen doorlaten, zo zullen de geringe stromen die door de trage elementen heen, tussen de bergende elementen worden afgevoerd, slechts weinig invloed op de vervallen over die bergende elementen kunnen uitoefenen.

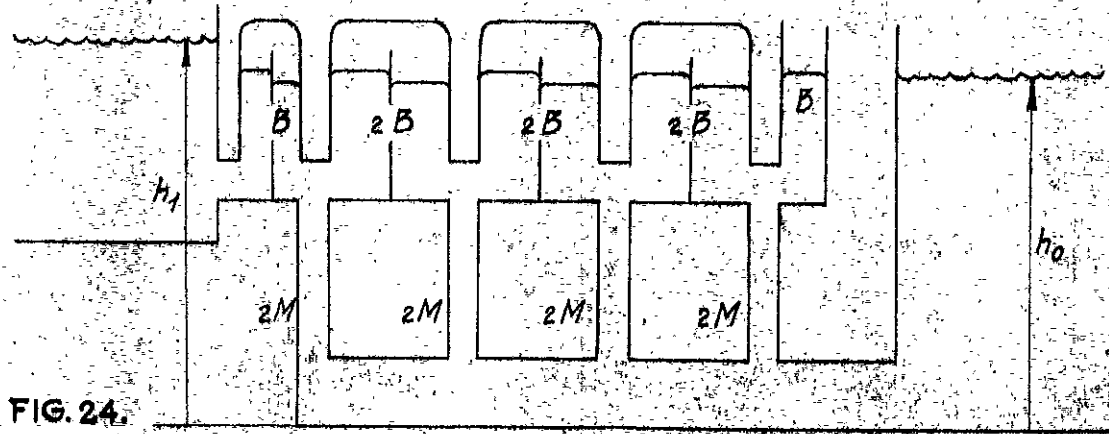


FIG. 24.

Bij hoge frequenties zal het niveau in het laatste bergende vat met berging B, de veranderingen in het niveau h_1 dus op de voet volgen. Er moge, misschien ten overvloede, nog even op gewezen worden, dat de traagheden in de voor berging bestemde elementen door geschikte afstemming

te verwaarlozen klein moeten worden gehouden.

Bij lage frequenties zullen integendeel de dan toch al geringe stromen die door de bergende elementen worden doorgelaten, nog afvloeien door de trage elementen in plaats van naar het volgende bergende element te worden doorgegeven. Het niveau in het laatste bergende element B zal dan ook bij langzame veranderingen van h_1 nagenoeg constant en gelijk aan het niveau h_0 blijven.

De theorie van de trillingsfilters kan in de hydraulika in de eerste plaats toepassing vinden bij meetinstrumenten. Moeten langzame waterstandsveranderingen (b.v. veroorzaakt door de getijbeweging) gemeten of geregistreerd worden op zodanige wijze dat storingen door allerlei veel snellere variaties (b.v. door deining) vermeden worden, dan kan daarvoor een laag doorlatend filter geconstrueerd worden, b.v. van het type van fig. 21. Dit filter moet zodanig gedimensioneerd worden dat de grensfrequentie groot is ten opzichte van de te meten frequenties (de getijfrequenties), en klein t.o.v. de frequenties van de te vermijden storingen (de deiningfrequenties).

Wil men omgekeerd b.v. deining meten onafhankelijk van langzame niveauveranderingen, b.v. door de getijbeweging, dan kan een filter van het type van fig. 24 geconstrueerd worden. Ook dan moet de grensfrequentie weer tussen de getijfrequenties en de deiningfrequenties in gekozen worden.

Ook in de waterbouwkunde kunnen trillingsfilters voorkomen, doch een enigzins meer gecompliceerd filter zal daar wegens de grote afmetingen van de afzonderlijke elementen al spoedig moeilijk realiseerbaar worden.

Een eenvoudig voorbeeld, waarbij de filterbeginselen toepassing vinden, is het geval van een stuwmeer in een rivier (zie fig. 25). Dit stuwmeer is als een bergend element op te vatten, dat tesamen met de weerstand W_1 en misschien ook enigzins de traagheid van het boven het meer gelegen riviergebede. Ite enerzijds, en de weerstand W_2 van de doorlaat of overlaat in de stuw anderzijds, min of meer als een filter werkt.

gend element, en de openingen in de dammen werken als trage of weerstandselementen. In beginsel kan door een geschikte dimensionering van de openingen en van de oppervlakte tussen de dammen, bereikt worden dat de deininggolving in belangrijke mate wordt tegengehouden, terwijl de langzaam variërende vloed- en ebstromen voor een groot deel hun weg door de geperforeerde golfbrekers zullen nemen.

Voor wat de uitvoering van de meetinstrumenten betreft, verwijzen we nog naar par. 13,2 van ons proefschrift, en naar een nota over vervalmeting met toepassing van een frequentiefilter. In deze nota is in het bijzonder nagegaan hoe met RB-combinaties, dus zonder gebruik maken van de vaak praktisch moeilijk te realiseren traagheidselementen, een scherp laagdoorlatend filter verkregen kan worden.