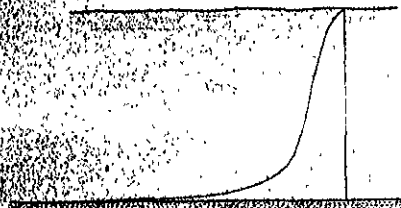


A
O BK000244
M -----

RAPPORT N^o9-1948

DE ZANDGEHALTEVERTICAAL
BIJ STATIONNAIRE STROMING ONDER
EVENWICHTSVORWAARDEN



DOOR:

R.H.J. MORRA

DDWT-BEN-1948-99

Nr. 6195^A

Betreffende: Studiedienst.
Opdracht Nr. 35.

In aansluiting op mijn opdracht Nr. 34 aan U, welke betrekking had op de betrouwbaarheid van onze zandmeetinstrumenten, verzoek ik U thans een nota te willen samenstellen van de zandgehalteverdeling in een verticaal.

De literatuur uit Amerika en elders is nog van recente datum en berust op wiskundige- en meetgegevens. Ge moet trachten de theorie verder te brengen en deze te toetsen aan de Nederlandsche metingen en aan die van buitenlandse. Het is nog niet nodig het onderzoek tot het tijdgebied uit te breiden.

DE HOOFDINGENIEUR
belast met de Studiedienst,
(get). J. van Veen.

AAN de Heer Opzichter 2e klasse
van de Rijkswaterstaat,
R.J.H. Morra
te
's-GRAVENHAGE.

Inhoud.

| § | Bla. |
|--|------|
| 1. Inleiding | 1 |
| 2. Theorie van de turbulente stroming | 2 |
| 3. Afleiding van de formules voor de zandgehalte - verticaal | 7 |
| 4. Het verband tussen bodemmateriaal en zwevend materiaal onder evenwichtsvoorwaarden | 20 |
| 5. Het transport van zwevend materiaal | 24 |
| 6. Toetsing der formules | 26 |
| 7. Beschouwing der afgeleide formules | 35 |
| 8. Samenvatting | 43 |
| Literatuurlijst | 45 |
| Gebruikte afkortingen | 46 |

§1. Inleiding.

In deze nota zal langs theoretische weg een aantal formules worden ontwikkeld welke voor de kennis van de zandbeweging van veel belang zijn. Hierbij is gebruik gemaakt van literatuur over dit onderwerp, welke in de laatste tijd verschenen is en waarvan een lijst is bijgevoegd, alsmede van opmerkingen gemaakt door de assistent van de Studiedienst H.J. Strobant, met wiens medewerking deze nota tot stand is gekomen.

In deze nota zal de verdeling van het zandgehalte in de verticale besproken worden, waarbij uitgegaan wordt van een stationnaire stromingstoestand onder evenwichtsvoorwaarden. Hiermede wordt bedoeld die toestand, waarbij het bedrag van uitschuring gelijk is aan het bedrag van aanzanding. Het betreft dus het eenvoudigst denkbare geval en is allen van belang voor bovenrivieren. Men kan het hier gebodene zien als een poging om voor bovenrivieren nader tot de oplossing van het zandbewegingsvraagstuk te geraken.

De zandbeweging in het getijgebied is veel ingewikkelder omdat er nimmer sprake is van een stationnaire stromingstoestand. Het enige wat hiervan bekend is, is dat het zandgehalte op een bepaalde hoogte evenredig is met de 3e à 4e macht van de snelheid; dit is een zuiver empirisch verband. Ook voor bovenrivieren bestaan er een aantal empirische formules (Straub, Schocklitsch, Meyer-Peter en anderen), welke echter met zeer veel omzichtigheid gebruikt moeten worden, omdat de hierin voorkomende constanten in de verschillende rivieren en riviervakken zeer sterk kunnen wisselen. Zo moest men bijvoorbeeld een constante uit de formule van Meyer-Peter vertienvoudigen om voor de Neder-Rijn bruikbare resultaten te verkrijgen. Het is duidelijk dat de waarde van zulke formules slechts betrekkelijk is.

Uit metingen is bekend (lit 10) dat de zandgehalteverticaal benaderd kan worden met de formule;

$$N_h = N_0 e^{-mh}$$

waarin N het zandgehalte voorstelt, respectievelijk op een hoogte h en 0 boven de bodem en m een constante is. Deze formule voldeet volgens alle bekende metingen nabij de bodem echter niet en dit is juist voor de zandbeweging het belangrijkste gebied. In eerste instantie zal deze benadering in het volgende ook afgeleid worden waardoor de waarde van de constante m door berekening uit de hydraulische factoren bepaald kan worden.

De zandbeweging is ten nauwste gekoppeld aan het mechanisme van de turbulentie. Daarom zal in § 2 een korte samenvatting worden gegeven van de turbulentietheorie. Hieruit zullen in § 3 enkele formules voor de verdeling van het zandgehalte in de verticaal worden afgeleid.

Het verband tussen bodem- en zwevend materiaal zal in § 4 worden besproken, terwijl in § 5 enkele transportformules zullen worden afgeleid. De afgeleide formules zullen in § 6 aan metingen getoetst worden, terwijl in § 7 enige beschouwingen zullen worden gegeven. Een beknopte samenvatting volgt in § 8.

§ 2. Theorie van de turbulente stroming (grotendeels overgenomen uit lit. 1).

De quantitative theorie van turbulente stroming, uitvoerig ontwikkeld door Osborne Reynolds; G.I. Taylor; L. Prandtl en Th. von Kármán, wordt nog zo snel gewijzigd en verbeterd, dat een gedetailleerd overzicht hier niet op zijn plaats is. Echter heeft deze theorie een dusdanige praktische betekenis, dat hieronder een sterk vereenvoudigde behandeling zal worden gegeven.

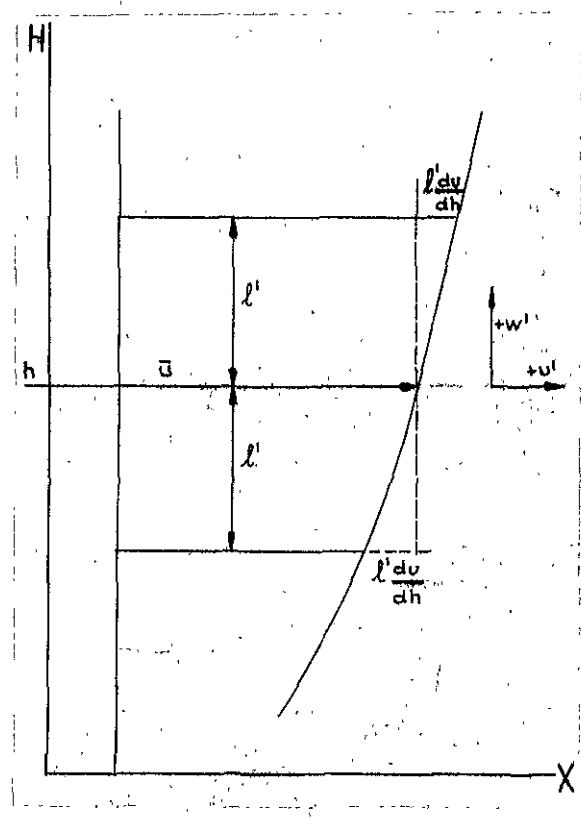


Fig.1.

Osborne Reynolds heeft het eerst de theorie van de turbulente stroming gegeven, die nu algemeen aanvaard is . Hij stelde zich de stroom in een punt voor als bestaande uit een gemiddelde snelheid waarop fluctuerende componenten gesuperposeerd zijn. Om het probleem te vereenvoudigen stelle men zich een stroom voor evenwijdig aan de X-as, waarvan de snelheid gemiddeld is over een tijdsduur welke overeen komt met de periode van een enkele fluctuatie. Stelt men nu de gemiddelde snelheid in deze richting voor door \bar{u} dan zijn de snelheidscomponenten op een bepaald ogenblik in een twee-dimensionale stromingstoestand:

$$u = \bar{u} + u' \text{ (X-richting)}$$

$$w = w' \text{ (H-richting).}$$

De impulsuitwisseling tussen twee boven elkaar gelegen waterlagen bedraagt per eenheid van oppervlakte:

$$-\rho (\bar{u} + u') w' .$$

De gemiddelde impulsuitwisseling per tijdseenheid moet cor-

responderen met de sleepkracht \bar{L} per eenheid van oppervlakte tussen de twee beschouwde waterlagen. De vergelijking is:

$$\bar{L} = -\frac{1}{t} \int_0^t \rho w' (\bar{u} + u') dt \quad (1),$$

waarin de tijdsinterval t fluctuaties bevat, splitst men deze integraal in twee delen dan is het tijdsgemiddelde van de eerste term:

$$-\frac{1}{t} \int_0^t \rho \bar{u} w' dt = 0,$$

aangezien \bar{u} een constante is en het tijdsgemiddelde van $w' = 0$.

Voor de integratie van de tweede term wordt aangenomen dat ρ constant blijft.

$$\bar{L} = -\frac{\rho}{t} \int_0^t u' w' dt = -\rho \overline{u' w'} \quad (2).$$

De term $\overline{u' w'}$ vertegenwoordigt het tijdsgemiddelde van het product der fluctuerende snelheidscomponenten op een bepaald ogenblik; het is niet noodzakelijk dat deze term 0 moet zijn, ofschoon de tijdgemiddelden van u' en w' afzonderlijk wel 0 zijn.

Het is nu nodig om de graad van correlatie tussen u' en w' nauwkeurig te bepalen. Waterdeeltjes welke een positieve waarde voor w' bezitten, bewegen zich van een waterlaag met kleinere horizontale snelheid \bar{u}_1 naar een waterlaag met grotere horizontale snelheid \bar{u} , dus $\bar{u}_1 < \bar{u}$. Bereiken ze deze waterlaag dan zal de horizontale snelheid iets afgeremd worden en dus \bar{u} iets afnemen, waar dan uit volgt dat u' negatief moet zijn. Omgekeerd vindt men voor een negatieve waarde van w' een positieve waarde van u' . Hieruit volgt dat het product $\overline{u' w'}$ altijd negatief zal zijn en dus \bar{L} positief.

Omdat twee gelijke en tegengestelde krachten werken op de vloeistof boven en beneden het horizontale vlak door h , moet bedacht worden dat het positieve teken alleen aangeeft dat de kracht versnellend werkt op de vloeistof beneden dit vlak.

De volgende stap in de ontwikkeling van de theorie is het verband te bepalen tussen u' en w' met de snelheidsgradiënt. Prandtl veronderstelde dat vloeistofdeeltjes zich op een overeenkomstige manier bewegen als moleculen in een gas en dat zij een afstand afleggen loodrecht op \bar{u} ; dit komt overeen met de "gemiddelde vrije weg" van een gasmolecule. In de turbulentietheorie staat deze afstand bekend als de "mengweg", dat is de afstand die een deeltje ten gevolge van de turbulentie aflegt in verticale richting voordat het zijn identiteit verliest in de omringen de waterlagen. Op grond van deze aanname is:

$$\left| \overline{u'} \right| (\pm) l' \frac{d\bar{u}}{dh}.$$

Hierbij is verondersteld dat de snelheidsgradiënt lineair is over de afstand l' . De absolute waarde kan gebruikt worden, omdat hierboven aangetoond is, dat het product altijd negatief is.

Prandtl nam verder aan dat $\left| \overline{w'} \right|$ evenredig is met $\left| \overline{u'} \right|$. De aanvaardbaarheid van deze aanname kan als volgt worden aangetoond. Veronderstel dat twee vloeistofmassa's van boven en beneden zijn aangekomen in vlak h . De massa van boven zal een grotere u -component hebben dan \bar{u} ; die van beneden een kleinere. De twee massa's zullen trachten een gezamenlijke beweging te krijgen of zich te scheiden. De hierdoor veroorzaakte verticale snelheden zullen evenredig zijn met het verschil in de snelheid van de beide massa's en daarom met u' . De vergelijking voor de sleepkracht bevat $\overline{u'w'}$ wat zich onderscheidt van het product van de gemiddelde absolute waarde van u' en w' door een constante factor, dus:

$$\begin{aligned} \overline{u'w'} &= - \text{constante} \rho \left| \overline{u'} \right| \overline{w'} \\ &= - \text{constante} \rho l'^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dh} \right)^2 \end{aligned} \quad (3).$$

Omdat l' niet gemakkelijk door directe metingen is vast te stel-

len , zou de constante evengoed opgenomen kunnen worden in een nieuwe lengte l. Verder zou het teken van τ variëren met het teken van $\frac{du}{dh}$, zodat de vergelijking uiteindelijk wordt:

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{du}{dh} \right| \frac{du}{dh} \tag{4}$$

Indien deze theorie juist is zou de lengte l evenredig zijn met de gemiddelde overbrengingsafstand door de vloeistofmassa's afgelegd.

De grootte van de Coëfficiënt l kan worden verkregen door experimenten op stromingen in buizen, als de snelheidsverdeling symmetrisch ten opzichte van de as is. Onder zulke voorwaarden is de schuifspanning:

$$\tau = r \frac{dp}{dx}$$

Substitutie in (4) en oplossing van l geeft:

$$|l| = \frac{\sqrt{\frac{r}{2\rho} \frac{dp}{dx}}}{\left| \frac{du}{dh} \right|}$$

Experimenten van Nikuradse en anderen tonen aan dat:

$$\frac{l}{r} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{h}{r} \right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{h}{r} \right)^4$$

Hierin is:

h : afstand van de wand;

r : straal van de buis

Dus:

$$l = 0,4 h - 0,44 \frac{h^2}{r} + \dots \tag{5}$$

De sleepkracht is:

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dh} \right)^2 \tag{6}$$

en volgens von Kármán (lit. 13) is:

$$l = k \frac{\frac{du}{dh}}{\frac{d^2u}{dh^2}} \tag{7}$$

Hierin is k de universele constante karakteristiek van de turbulentie-uitwisseling en z de relatieve hoogte $\frac{h}{R}$.

Substantie in (5) geeft $k = \pm 0,4$.

Een aantal experimenten hebben practisch dezelfde waarde gegeven.

In lineaire stroming is:

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dh}$$

μ = viscositeit.

Stanton nam een overeenkomstige vergelijking aan voor turbulente stroming:

$$\tau = \varphi \frac{d\bar{u}}{dh} + \mu \frac{d\bar{u}}{dh} \tag{8}$$

waarin φ = mechanische viscositeit.

Zoals hierboven al is opgemerkt, is de tweede term in turbulente stroming te verwaarlozen.

Stelt men nu $\varphi = \rho \epsilon$, dan is:

$$\epsilon = l^2 \frac{d\bar{u}}{dh} = lw' \tag{9}$$

wat in vorm overeenkomt met:

$$\mu = \frac{1}{3} \rho cL$$

c : gemiddelde moleculaire snelheid;

L : gemiddelde vrije weg tussen de moleculaire botsing.

Uit (6) en (9) volgt dus:

$$\tau = \rho \epsilon \frac{dV}{dh} \tag{10}$$

§ 3. Afleiding van de formules voor de zandgehalteverticaal.

Formule (10) geeft dus, zoals in het begin van § 2 reeds is opgemerkt, de impulsauswisseling waar in verticale richting ten gevolge van de turbulentie.

Beschouwt men nu een vloeistofeenheid welke bestaat uit een groot aantal waterdeeltjes, dan zijn al deze deeltjes dragers van bepaalde eigenschappen, bijvoorbeeld de temperatuur, een zekere hoeveelheid gesuspendeerd materiaal enz. Men kan dus formule (10)

ook algemeen schrijven:

$$M = \epsilon_N \frac{dN}{dh} \quad (11).$$

Hierin is:

M de mate van overdracht van een eigenschap N in de richting h per tijdseenheid;

ϵ_N de uitwisselingscoëfficiënt voor de eigenschap N .

Het teken van $\frac{dN}{dh}$ bepaalt het teken van M . Formule (11) wordt algemeen aannvaard als de fundamentele formule voor de overdracht door turbulentie.

In het volgende zal de eigenschap N beschouwd worden als het zandgehalte, dus dan is M het transport in de richting h als gevolg van de turbulentie-uitwisseling. Het is natuurlijk niet noodzakelijk dat ϵ uit (10) gelijk is aan ϵ_N uit (11). Dit zal wel het geval zijn als de tijdfactor welke in ϵ voorkomt lang genoeg is, dus wanneer de zanddeeltjes dezelfde snelheid hebben verkregen als de omringende waterdeeltjes. Dit zal bij volledig ontwikkelde turbulentie het geval zijn. Het zou te ver voeren om hier diep op in te gaan. De aanname wordt nu gedaan dat de uitwisselingscoëfficiënt voor zand- en waterdeeltjes dezelfde is. Voorzover namelijk de menging veroorzaakt door turbulentie resulteert in een doorlopende uitwisseling van de vloeistofdeeltjes tussen naburige lagen, is het duidelijk dat ditzelfde proces gevolgd moet worden door iedere eigenschap van de vloeistof. Dit geldt uiteraard alleen wanneer de turbulentie volkomen ontwikkeld is, zodat de invloed van de viscositeit mag verwaarloosd worden. De intensiteit van het mengingsproces wordt bepaald door lw' (9). In 1 is tevens opgenomen de snelheidsgradiënt (7).

Vergelijking (11) gaat dus over in:

$$M = - \epsilon \frac{dN}{dh} \quad (12).$$

Het minteken duidt op een afname van het zandgehalte N met een toename van de hoogte.

Op elementaire wijze zal nu de algemene partiële differentiaalvergelijking worden afgeleid, die de beweging van de zanddeeltjes in stromend water beschrijft.

Stelt men zich een waterelement voor Δx eenheden lang, Δh eenheden hoog en één eenheid breed en bepaalt men het bedrag aan zwevend materiaal dat door elk der vier zijden gaat, dan zal de algebraïsche som van deze bedragen de verandering van het zandgehalte in dit element opleveren onder inachtneming van de tijd (zie fig. 2).

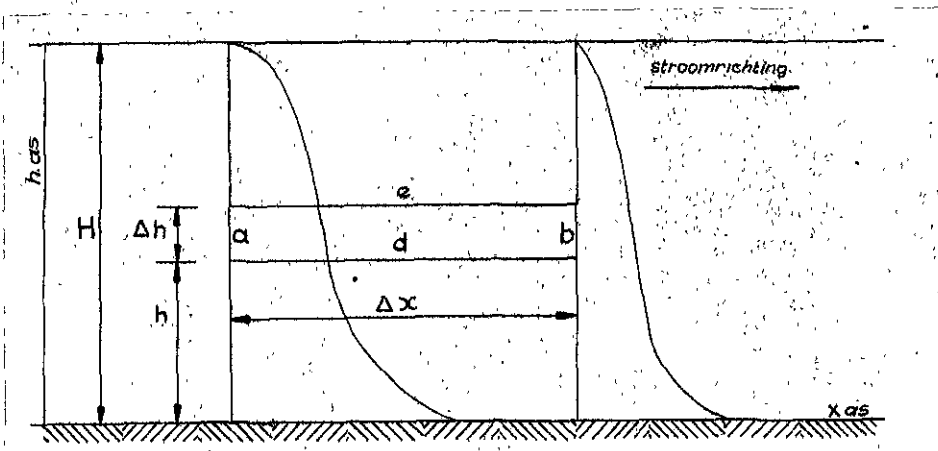


Fig. 2.

Als horizontale as wordt de bodem aangehouden en loodrecht daarop de verticale h -as. De stroomrichting en de richting naar de oppervlakte zijn positief.

1e. Ten gevolge van de turbulentie-uitwisseling vindt door de zijden d en e van het element een opwaarts gericht transport plaats. Dit bedraagt respectievelijk voor d en e volgens (12):

$$M_d = \left(-\epsilon \frac{dN}{dh} \right)_d ;$$

$$M_e = \left(-\epsilon \frac{dN}{dh} \right)_e = \left(-\epsilon \frac{dN}{dh} \right)_d - \frac{d}{dh} \left(-\epsilon \frac{dN}{dh} \right)_d .$$

Het netto-transport bedraagt dus:

$$M_d - M_e = - \frac{d}{dh} \left(\xi \frac{dN}{dh} \right).$$

Deze term is positief omdat $\frac{dN}{dh}$ negatief is;

2e. Er is nog een transport door de zijden d en e. Dit wordt veroorzaakt door de zwaartekracht en is naar beneden gericht.

Noemt men de valsnelheid c , dan krijgt men een netto-transport:

$$cN_d - cN_e = cN_d - \left\{ cN_d - \left(-c \frac{dN}{dh} \right) d \right\} = -c \frac{dN}{dh}.$$

Deze term is negatief omdat c en $\frac{dN}{dh}$ beide negatief zijn;

3e. Aangezien het gehalte ook in de x-richting varieert zal er een netto toe- of afname in het element zijn, dat veroorzaakt wordt door het mengingsproces van de turbulentie in de horizontale richting. Men vindt dan:

a Voor erosie (dus $\frac{dN}{dx}$ is positief en $M_a < M_b$)

$$M_a - M_b = \left(\xi_x \frac{dN}{dx} \right)_a - \left\{ \left(\xi_x \frac{dN}{dx} \right)_a + \frac{d}{dx} \left(\xi_x \frac{dN}{dx} \right) \right\} = - \frac{d}{dx} \left(\xi_x \frac{dN}{dx} \right)$$

Deze term is negatief;

b Voor sedimentatie (dus $\frac{dN}{dx}$ is negatief en $M_a > M_b$)

$$M_a - M_b = \left(-\xi_x \frac{dN}{dx} \right)_a - \left\{ \left(-\xi_x \frac{dN}{dx} \right)_a - \frac{d}{dx} \left(-\xi_x \frac{dN}{dx} \right)_a \right\} = - \frac{d}{dx} \left(\xi_x \frac{dN}{dx} \right)$$

Deze term is positief;

4e. De snelheid van het water, stromende door het element is V en omdat het gehalte bij a en b verschilt, wordt het netto-bedrag van de toe- of afname:

a Voor erosie (dus $\frac{dN}{dx}$ is positief en $N_a < N_b$)

$$VN_a - VN_b = VN_a - \left(VN_a + \frac{VdN}{dx} \right) = - \frac{VdN}{dx}$$

Deze term is negatief;

b Voor sedimentatie ($\frac{dN}{dx}$ is negatief en $N_a > N_b$)

$$VN_a - \left\{ VN_a - \left(\frac{VdN}{dx} \right) \right\} = - \frac{VdN}{dx}$$

Deze term is positief.

De mate van de totale toe- of afname kan nu worden uitgedrukt en is gelijk aan het gehalte in het element met inachtneming van de tijd. Brengt men nu het element terug tot oneindig kleine afmetingen dan verkrijgt men de volgende partiële differentiaalvergelijking:

$$\frac{\delta N}{\delta t} = - \frac{\delta}{\delta h} \left(c \frac{dN}{dh} \right) - c \frac{\delta N}{\delta h} - \frac{\delta}{\delta x} \left(c_x \frac{\delta N}{\delta x} \right) - V \frac{\delta N}{\delta x} \quad (13).$$

Hierin is:

N : het zandgehalte op de hoogte h boven de bodem;

t : tijd;

c : uitwisselingscoëfficiënt in de richting h ;

c_x : uitwisselingscoëfficiënt in de richting x ;

x : horizontale afstand;

c : valsnelheid van het zand in stil water (negatieve waarde);

V : stroomsnelheid van het water op de hoogte h (positieve waarde).

Er is hier dus verondersteld dat V en dus ook $c(x)$ niet met de tijd veranderen en dat c over de gehele hoogte constant is, met andere woorden er is hier sprake van stationnaire stroming en materiaal met een uniforme korrelgrootte. Toch kan N wel met t veranderen; er is dan sprake van uitschuring of aanzanding. Zijn $\frac{dN}{dt}$ en $\frac{dN}{dx}$ positief, dan treedt er uitschuring op; in het tegenovergestelde geval aanzanding. Verandert N niet met t en met x , dan zal er een evenwichtstoestand bestaan, met andere woorden er wordt evenveel zand aan de bodem toegevoegd als onttrokken.

($\frac{dN}{dt}$ en $\frac{dN}{dx}$ zijn 0).

Zoals reeds in de inleiding is gezegd, zal in deze nota alleen de evenwichtstoestand besproken worden. Vergelijking (13) gaat dus over in:

$$0 = - \frac{\delta}{\delta h} \left(c \frac{\delta N}{\delta h} \right) - c \frac{\delta N}{\delta h}.$$

Beide termen zijn aan elkaar gelijk, doch zijn tegengesteld van teken. Na integratie volgt dus de evenwichtsvoorwaarde:

$$\boxed{cN = - \int \frac{dN}{dh}} \quad (14).$$

c heeft hier en in het volgende een positieve waarde.

Om langs eenvoudiger weg komt men tot de evenwichtsvoorwaarde. Er zal namelijk evenwicht bestaan, wanneer in een bepaald punt evenveel zand ten gevolge van de zwaartekracht valt als er door de turbulentie omhoog wordt gevoerd. Het transport in opwaartse richting moet dus gelijk zijn aan het vallend transport of volgens (12):

$$cN = - \int \frac{dN}{dh}.$$

Uit de evenwichtsvoorwaarde (14) volgt:

$$\frac{1}{N} dN = - \frac{c}{\xi} dh$$

$$\int_{h'}^h \frac{1}{N} dN = - c \int_{h'}^h \frac{1}{\xi} dh$$

$$\boxed{\ln \frac{N_h}{N_{h'}} = - c \int_{h'}^h \frac{1}{\xi} dh} \quad (15)$$

Hierin is :

N_h en $N_{h'}$, het zandgehalte respectievelijk op een hoogte h en h' boven de bodem.

Wanneer nu de veranderlijkheid van ξ met de hoogte bekend is, kan deze vergelijking worden opgelost.

Nu wordt algemeen aangenomen dat de schuifspanning een lineaire functie is van de hoogte h . De formule hiervoor luidt:

$$\tau_h = \tau_0 \left(1 - \frac{h}{H} \right) \quad (16).$$

Hierin is:

τ_0 en τ_h de schuifspanning respectievelijk op een hoogte 0 en h boven de bodem;

H de waterdiepte (hoogte waterspiegel boven de bodem),

Tevens is bekend dat :

$$\tau_0 = \rho g H I \quad (17).$$

Is nu ook de snelheidsverdeling als een functie van h bekend, dan kan ζ bepaald worden met behulp van (10), (16) en (17). Er zijn verschillende formules voor de snelheidsverdeling in de verticale. Een tweetal zal hier gebruikt worden namelijk de logarithmische snelheidsverdeling, die exact is af te leiden en de parabolische snelheidsverdeling, die lange empirische weg uit metingen in de rivieren en zeegeten is bepaald (lit. 7). De laatste is in Nederland gebruikelijk. Op het verschil tussen beide wordt in § 7 teruggekomen.

Uitgaande van de parabolische snelheidsverdeling:

$$v = v_1 h^{\frac{1}{q}} \quad (18).$$

waarin q de graad van de parabool en v_1 de snelheid op de eenheid van hoogte is, krijgt men:

$$\frac{dv}{dh} = \frac{1}{q} v_1 h^{\frac{1-q}{q}} \quad (19).$$

Substitutie van (19) en (10) geeft met (16) en (17) :

$$\rho g H I \cdot \frac{1}{q} v_1 h^{\frac{1-q}{q}} = \rho g H I \left(1 - \frac{h}{H}\right).$$

Stelt men hierin de relatieve hoogte $\frac{h}{H} = z$ dan volgt:

$$\zeta = \frac{g H I q (1-z) \cdot h^{\frac{q+1}{q}}}{v_1} \quad (20).$$

Uit (18) volgt:

$$v_m = \frac{\int_0^H v_1 h^{\frac{1}{q}} dh}{H} = \frac{v_1 \left[\frac{q+1}{q} h^{\frac{q+1}{q}} \right]_0^H}{H} = \frac{q}{q+1} v_1 H^{\frac{1}{q}},$$

doch ook is:

$$v_m = C \sqrt{RI},$$

zodat:

$$v_1 = \frac{C \sqrt{RI (q+1)}}{H^{\frac{1}{q}}}$$

Dit gesubstitueerd in (20) geeft; omdat voor de eenheid van breedte geldt $R = H$:

$$\xi = \frac{gHI q^2 (1-z) z^{\frac{q-1}{q}}}{C \sqrt{RI} (q+1) H^{\frac{q-1}{q}}}$$

$$\xi = \frac{g\sqrt{HI} q^2 H (1-z) z^{\frac{q-1}{q}}}{C (q+1)}$$

(21).

Hieruit kan de gemiddelde waarde van ξ bepaald worden.

$$\xi_m = \frac{g\sqrt{HI} q^2 H}{C (q+1)} \int_0^1 (1-z) z^{\frac{q-1}{q}} dz.$$

De deling door de relatieve waterdiepte kan achterwege gelaten worden, omdat deze gelijk aan 1 is.

$$\xi_m = \frac{g\sqrt{HI} q^2 H}{C (q+1)} \left[\frac{z^{\frac{2q-1}{q}}}{2q-1} - \frac{z^{\frac{3q-1}{q}}}{3q-1} \right]_0^1$$

$$\xi_m = \frac{g\sqrt{HI} q^2 H}{C (q+1)} \left(\frac{q}{2q-1} - \frac{q}{3q-1} \right)$$

$$\xi_m = \frac{\sqrt{HI} H s}{C^2}$$

(22).

$$s = \frac{q}{q+1} \left(\frac{q}{2q-1} - \frac{q}{3q-1} \right).$$

Bij benadering geldt:

$$\text{voor } q=3 \text{ is } s=1,65 q$$

$$q=4 \quad s=1,63 q$$

$$q=5 \quad s=1,62 q.$$

In de publicaties van de Amerikaanse National Research Council

(zie literatuurlijst) wordt in dit verband gebruik gemaakt van de

logarithmische snelheidsverdeling in vereenvoudigde vorm. Deze

leidt tot eenvoudiger formules, doch is minder juist. Hierop

wordt nader in §7 teruggekomen.

$$V = V_m + \frac{\sqrt{gRI}}{k} \left(1 + \ln \frac{h}{H} \right) \quad (23).$$

k is de universele constante van von Kármán, die voor schoon wa-

ter te stellen is op ongeveer 0,4 (zie § 2)

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\sqrt{gRI}}{k} \frac{1}{H} \frac{H}{h} = \frac{\sqrt{gRI}}{kh} \quad (24).$$

Dit gesubstitueerd in (10) geeft met (16) en (17),

$$\rho \mathcal{E} \frac{dV}{dh} = \rho gHI (1-z).$$

Dus:

$$\mathcal{E} = \frac{kgHI (1-z) h}{\sqrt{gHI}}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = kH \sqrt{gHI} (1-z) z} \quad (25).$$

De bepaling van \mathcal{E}_m levert op:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= kH \sqrt{gHI} \int_0^1 (1-z) z dz \\ &= kH \sqrt{gHI} \left[\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{kH \sqrt{gHI}}{6}} \quad (26).$$

Bij beschouwing van de formules (21) en (25) blijkt dat \mathcal{E} voor bodem en oppervlakte 0 is, terwijl het maximum voor de eerste iets onder de halve hoogte ligt en voor de tweede op de halve hoogte. Experimenteel is deze vorm blijkens Amerikaanse onderzoekingen bevestigd (zie fig. 22).

Nu de verandering van \mathcal{E} met de hoogte h bekend is, is het dus mogelijk geworden (15) verder uit te werken met behulp van (21) en (25). Beide kan men als volgt schrijven:

$$\mathcal{E} = bH (1-z) z^p.$$

Voor (21) is $b = \frac{g\sqrt{HI} q^2}{c(q+1)}$ en $p = \frac{q-1}{q}$ (par. snelh. verd.)

Voor (25) is $b = k\sqrt{gHI}$ en $p = 1$ (log. snelh. verd.)

Formule (15) gaat dus over in:

$$\ln \frac{N_h}{N_{h'}} = -\frac{c}{b} \int_{h'}^h \frac{1}{h' H (1-z) z^p} dh$$

$z = \frac{h}{H}$ dus $dh = H dz$ en stel $\frac{h'}{H} = a$

$$\ln \frac{N_z}{N_a} = -\frac{c}{b} \int_a^z \frac{1}{(1-z) z^p} dz$$

Nu is $\frac{1}{(1-z)}$ de som van een meetkundige reeks:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1},$$

wanneer $z < 1$ en dit is in bovenstaande integraal het geval, omdat z een relatieve hoogte voorstelt.

Deze integraal kan dus als volgt geschreven worden:

$$\ln \frac{N_z}{N_a} = -\frac{c}{b} \int_a^z \frac{1+z+z^2+z^3+\dots}{z^p} dz$$

$$= -\frac{c}{b} \int_a^z z^{-p} + z^{1-p} + z^{2-p} + z^{3-p} + \dots dz.$$

Voor de logarithmische snelheidsverdeling is $p = 1$ en wordt de

vorm:

$$\ln \frac{N_z}{N_a} = \frac{c}{b} \left[-\ln z - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \dots \right]_a^z$$

$$\ln \frac{N_z}{N_a} = \frac{c}{b} \left[-\ln z + \ln(1+z) \right]_a^z = \frac{c}{b} \ln \frac{1-z}{z} \Big|_a^z$$

Stelt men nu $\frac{c}{b} = t$ dan is $\frac{c}{b} = \frac{t}{k}$ ($k = \frac{1}{t} = 0,4$)

$$\frac{N_z}{N_a} = \left(\frac{1-z}{z} \cdot \frac{a}{1-a} \right)^{\frac{t}{k}}$$

(27).

Dit is een in de Vereenigde Staten gebruikelijke formule.

Voor de parabolische snelheidsverdeling is $p < 1$ en wordt de vorm

$$\ln \frac{N_z}{N_a} = -\frac{c}{b} \left[\frac{1}{1-p} z^{1-p} + \frac{1}{2-p} z^{2-p} + \frac{1}{3-p} z^{3-p} + \dots \right]_a^z$$

stel $1-p = \Delta p = 1 - \frac{q-1}{q} = \frac{1}{q}$

$$\ln \frac{N_z}{N_a} = -\frac{c}{b} \left[\frac{1}{\Delta p} z^{\Delta p} + \frac{1}{1+\Delta p} z^{1+\Delta p} + \frac{1}{2+\Delta p} z^{2+\Delta p} + \dots \right]_a^z$$

Hier is $\frac{c}{b} = \frac{c_0 (q+1)}{g \sqrt{HI} q^2}$

$$\ln \frac{N_z}{N_a} = -\frac{c_0}{g \sqrt{HI} q} \left[\frac{q+1}{q} z^{\Delta p} \left(\frac{1}{\Delta p} + \frac{z}{1+\Delta p} + \frac{z^2}{2+\Delta p} + \dots \right) \right]_a^z$$

$$= -\frac{c_0}{g \sqrt{HI} q} \left[z^{\frac{1}{q}} \left((q+1) + z + \frac{q+1}{2q+1} z^2 + \frac{q+1}{3q+1} z^3 + \dots \right) \right]_a^z$$

$$= -\frac{c_0}{g \sqrt{HI} q} \left[z^{\frac{1}{q}} \left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots (q+1) + \frac{z^2}{4q+2} + \frac{z^3}{9q+3} + \dots \right) \right]_a^z$$

$$= \frac{cC}{g \sqrt{HI} q} \left| z^{\frac{1}{q}} \left(\ln z(1-z) - (q+1) \right) \right|_a^z.$$

De verwaarlozing van de reeks $-(\frac{z^2}{4q+2} + \frac{2z^3}{9q+3} + \dots)$ heeft geen merkbare invloed, slechts een uiterst geringe fout wordt gemaakt, wanneer z tpt 1 nadert, dat wil zeggen nabij de oppervlakte, dus in het gebied waar het zandgehalte zeer gering is.

De verhouding $\frac{V_{\max}}{v}$ is volgens de parabolische snelheidsverdeling $\frac{(q+1)}{q}$ en volgens de logarithmische snelheidsverdeling $1 + \frac{\sqrt{gRI}}{kV_m}$. Stelt men dit aan elkaar gelijk, dan is:

$$k = \frac{q\sqrt{g}}{C} \quad (\text{zie ook } \S 7).$$

Stelt men nu weer $t = \frac{c}{\sqrt{gRI}}$ dan wordt:

$$\ln \frac{N_z}{N_a} = \frac{t}{k} \left[z^{\frac{1}{q}} \left(\ln(1-z) - (q+1) \right) - a^{\frac{1}{q}} \left(\ln(1-a) - (q+1) \right) \right]$$

$$\frac{N_z}{N_a} = \left\{ \frac{(1-z)^z e^{-(q+1)z}}{(1-a)^a e^{-(q+1)a}} \right\}^{\frac{t}{k}} \quad (28).$$

Voor $\frac{t}{k}$ kan men ook lezen $\frac{cC}{qg\sqrt{HI}}$.

Ter vereenvoudiging van het rekenwerk zijn de functies

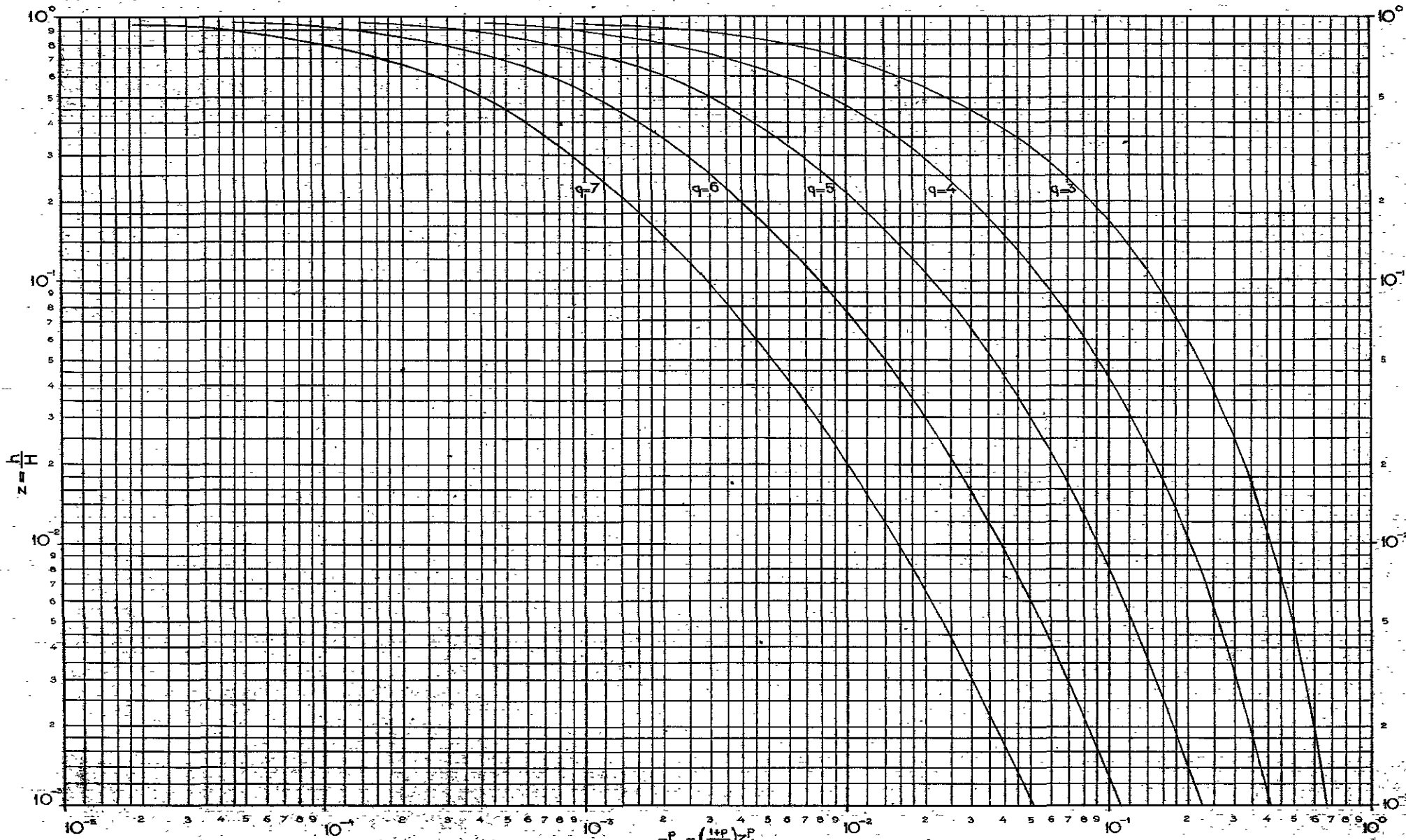
$$(1-z)^{\frac{1}{q}}, e^{-(q+1)z^{\frac{1}{q}}} \text{ en } z^{\frac{1}{q}} \text{ in fig. 3 voor verschillende waarden van } q \text{ uitgezet. Dezelfde grafiek is natuurlijk ook te gebruiken voor de functies met } a, \text{ zodat (28) tussen de accoladen grafisch te bepalen is.}$$

Is $a = 0$ dan wordt de noemer in (28) gelijk aan 1 en krijgt men

$$\text{dus: } \frac{N_z}{N_0} = \left\{ (1-z)^z e^{-(q+1)z^{\frac{1}{q}}} \right\}^{\frac{t}{k}} \quad (28^a).$$

Uit deze vorm kan de verhouding $\frac{N_m}{N_0}$ bepaald worden.

De eerste term wordt zeer dicht benaderd door $(1-z)^{\frac{q+1}{q}}$ en stelt men nu $\frac{t}{k} = p$ en $q+1 = b$ dan volgt:



$(1-z)^p e^{-\left(\frac{1+p}{p}\right)z^p}$ uit (28) en (28^a) $p = \frac{1}{q}$

FIGUR 3

$$\begin{aligned}
 \frac{N_m}{N_0} &= \int_0^1 (1-pz^{\frac{q+1}{q}}) e^{-bpz^{\frac{1}{q}}} dz = \quad (29). \\
 &= \int_0^1 e^{-bpz^{\frac{1}{q}}} dz - \int_0^1 pz^{\frac{q+1}{q}} e^{-bpz^{\frac{1}{q}}} dz = \\
 &= \int_0^1 (1-bpz^{\frac{1}{q}} + \frac{b^2 p^2 z^{\frac{2}{q}}}{2!} - \frac{b^3 p^3 z^{\frac{3}{q}}}{3!} + \dots) dz = \\
 &= \int_0^1 p(z^{\frac{q+1}{q}} - bpz^{\frac{q+2}{q}} + \frac{b^2 p^2 z^{\frac{q+3}{q}}}{2!} - \frac{b^3 p^3 z^{\frac{q+4}{q}}}{3!} + \dots) dz = \\
 &= \left[z - \frac{q}{q+1} bpz^{\frac{q+1}{q}} + \frac{q}{q+2} \frac{b^2 p^2 z^{\frac{q+2}{q}}}{2!} - \frac{q}{q+3} \frac{b^3 p^3 z^{\frac{q+3}{q}}}{3!} - \dots \right]_0^1 = \\
 &= \left[p \left(\frac{q}{2q+1} z^{\frac{2q+1}{q}} - \frac{q}{2q+2} bpz^{\frac{2q+2}{q}} + \frac{q}{2q+3} \frac{b^2 p^2 z^{\frac{2q+3}{q}}}{2!} - \frac{q}{2q+4} \frac{b^3 p^3 z^{\frac{2q+4}{q}}}{3!} + \dots \right) \right]_0^1 = \\
 &= \left(1 - \frac{q}{q+1} bp + \frac{q}{q+2} \frac{b^2 p^2}{2} - \frac{q}{q+3} \frac{b^3 p^3}{3} \dots \right) - \frac{q}{2q+1} p \left(1 - \frac{2q+1}{2q+2} bp + \right. \\
 &+ \left. \frac{2q+1}{2q+3} \frac{b^2 p^2}{2!} \dots \right) \\
 \\
 \frac{N_m}{N_0} &= e^{-bp} \left\{ \left(1 + \frac{1}{q+1} bp + \frac{1}{(q+1)(q+2)} b^2 p^2 + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} b^3 p^3 \right. \right. \\
 &\dots \left. \left. - \frac{q}{2q+1} p \left(1 + \frac{1}{2q+2} bp + \frac{1}{(2q+2)(2q+3)} b^2 p^2 + \right. \right. \right. \\
 &\left. \left. \left. + \frac{1}{(2q+2)(2q+3)(2q+4)} b^3 p^3 \dots \right) \right\} \quad (\text{zie fig. 4}) \quad (30).
 \end{aligned}$$

Een bruikbare benadering van de zandgehalteverticaal verkrijgt men, wanneer men aannemt dat de uitwisselingscoëfficiënt ζ over de gehele hoogte constant blijft. Men kan zoals later zal blijken met de formules welke uit deze aanname volgen niet verder rekenen, omdat men bij de bodem een belangrijke fout maakt.

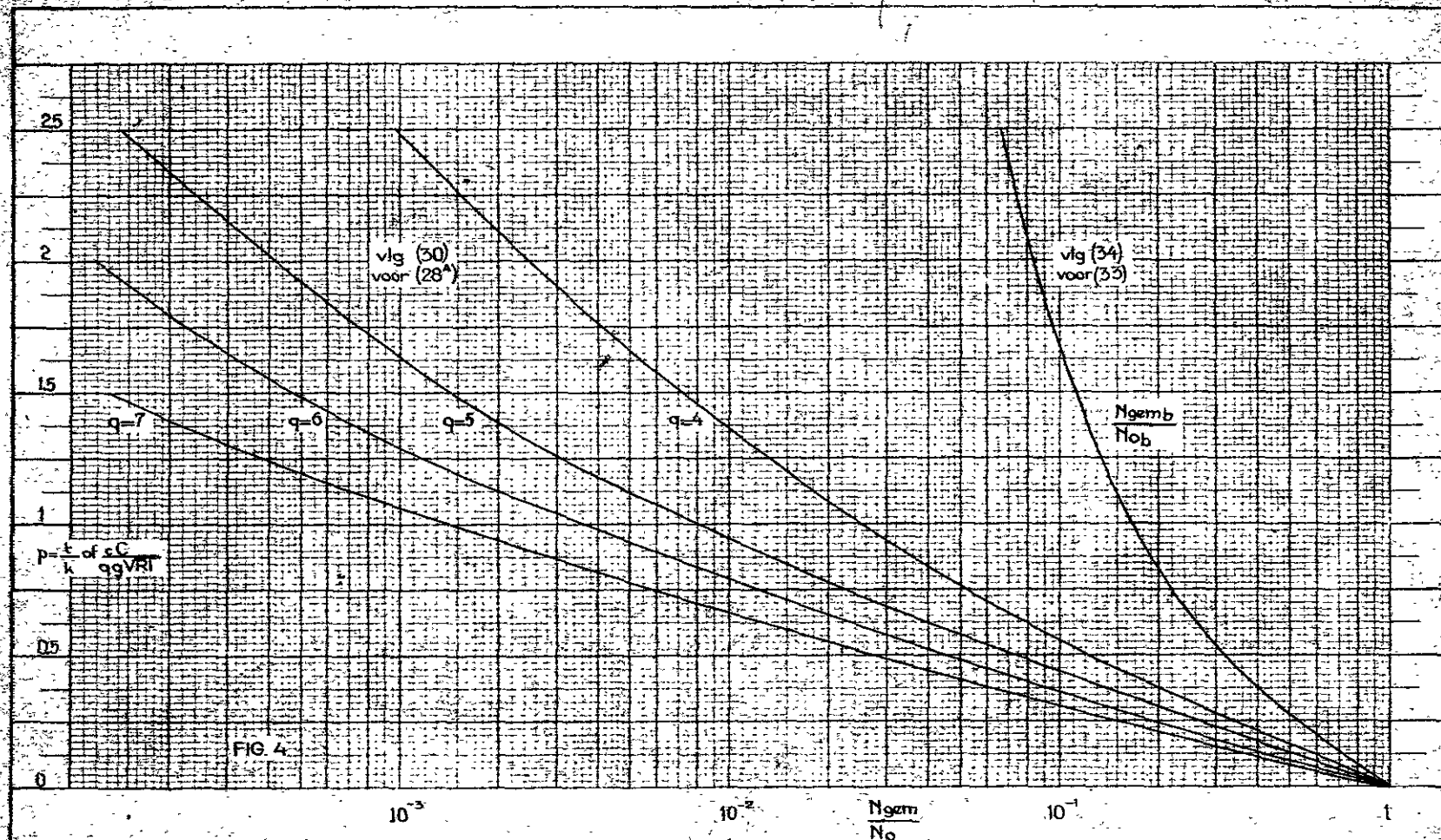


FIG. 4

Substitueert men (22) en (23) nu in (15) dan volgt:

$$\ln \frac{N_h}{N_{h'}} = - \int_{h'}^h \frac{a}{\xi_{gem}} dh$$

$$= - \frac{a}{\xi_{gem}} (h-h')$$

dus: $\frac{N_h}{N_{h'}} = e$ (31)

Substitueert men (22) dan volgt voor de parabolische snelheidsverdeling:

$$\frac{N_{zb}}{N_{ab}} = e^{-\frac{a\sqrt{g}}{s} t (z-a)}$$

(32).

Substitueert men (26) dan volgt voor de logarithmische snelheidsverdeling:

$$\frac{N_{zb}}{N_{ab}} = e^{-\frac{6}{k} t (z-a)}$$

(33).

De indice b is de afkorting van benaderd. In beide formules is $t = \frac{a}{\sqrt{gHI}}$. De waarde van (22) en (26) voor ξ_{gem} is dezelfde:

$$\frac{a\sqrt{g}}{s} = \frac{g}{1,62} \frac{a}{\sqrt{g}} = \frac{6}{k}, \text{ omdat, zoals op bladzijde 12 is afgeleid,}$$

$$k = \frac{a\sqrt{g}}{a}.$$

Uit (33) volgt:

$$\frac{N_{mb}}{N_{ob}} = \int_0^1 e^{-\frac{6}{k} tz} dz = \left| -\frac{k}{6t} e^{-\frac{6}{k} tz} \right|_0^1 = -\frac{k}{6t} e^{-\frac{6}{k} t} + \frac{k}{6t} \quad (34).$$

Zowel (30) als (34) zijn in figuur 4 voor verschillende waarden van $\frac{6}{k}$ uitgezet. Hieruit blijkt dat de verhouding $\frac{m}{N_0}$ afneemt naarmate t toeneemt.

Aangezien t evenredig is met de velsnelheid en omgekeerd evenredig met \sqrt{gHI} , zal er volgens fig. 4 dus met het toenemen van de korrelgrootte of het afnemen van de snelheid minder zand tot zwenning komen. Hierop wordt nader teruggekomen.

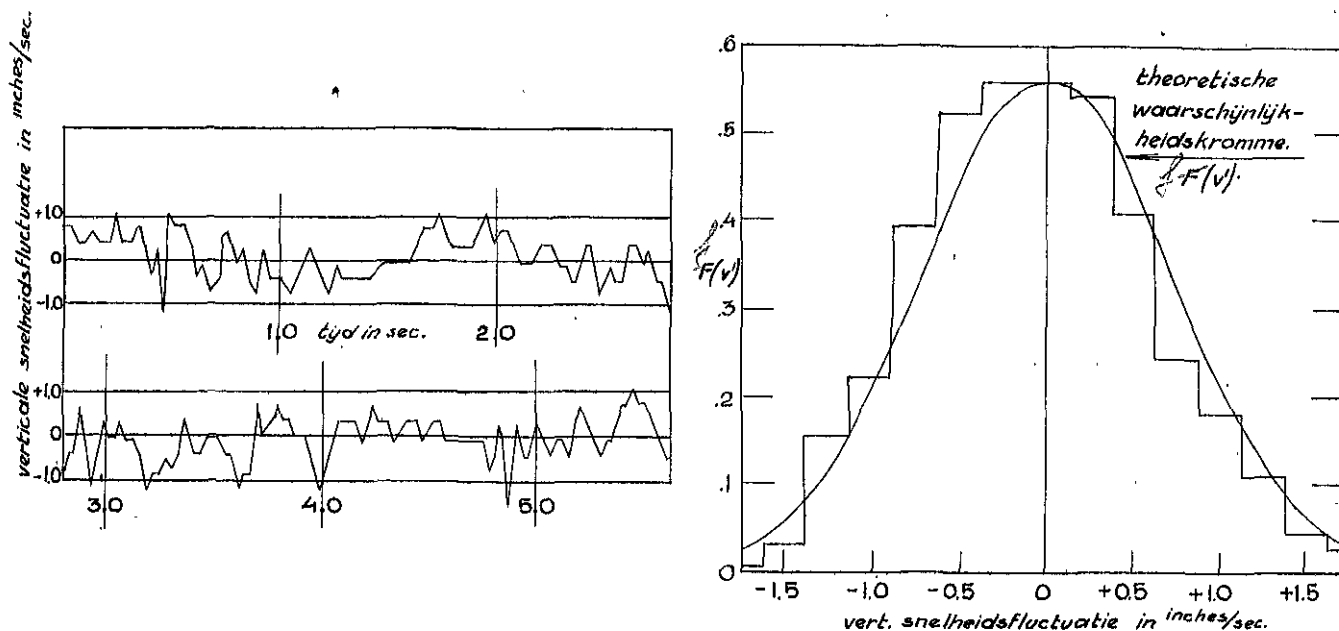
Men is nu dus in staat om met de in deze § ontwikkelde formules uit de hydraulische factoren voor elke korrelgrootte de verhou-

dingen in de verticaal te bepalen. In § 6 waar de afgeleide formules zullen worden getoetst zal blijken dat formule (27) niet aan te bevelen is, tenminste niet zonder meer. De dezerzijds ontwikkelde formule (28) voldoet wel. Op de oorzaken hiervan zal in § 7 nader worden ingegaan.

§ 4. Het verband tussen bodemmateriaal en zwevend materiaal onder evenwichtsvoorwaarden.

De korrelgrootte van het zwevend materiaal kan gelijk of kleiner zijn dan van het bodemmateriaal. Bodemmateriaal wordt opgenomen en in zwevende toestand gehouden door opwaarts gerichte snelheidscomponenten van de turbulentie. Dit uitwisselingsproces is, zoals reeds eerder is gebleken, ten nauwste verbonden met het mechanisme van de turbulentie.

Experimenteel is vastgesteld dat de verticale componenten van de turbulentiesnelheid statistisch verdeeld zijn volgens de normale foutenwet (lit.4). Dit moet ook zo zijn, omdat er geen resulterende verticale snelheid aanwezig kan zijn. In figuur 5 zijn de resultaten van een der bedoelde experimenten weergegeven.



Figuur 5.

De waarschijnlijkheidskromme, die deze frequentieverdeling weergeeft, voldoet aan de vergelijking:

$$f(v') = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} \quad (35).$$

Hierin is:

- v' : de verticale snelheidscomponent van de opwaarts gerichte turbulentiesnelheid;
- Δ : grenzen waartussen v' zich beweegt;
- h : nauwkeurigheidscoefficient.

Volgens de waarschijnlijkheidswet is $\Delta_1 = \frac{1}{h\sqrt{2}}$, waarin Δ_1 de plaats van het buigpunt is en tevens de middelbare waarde geeft van Δ , dus $\Delta_1 = \bar{v}'$.

Hieruit volgt dat $h = \frac{1}{\sqrt{v'^2}}$, zodat (35) overgaat in:

$$f(v') = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{v'^2}} e^{-\frac{v'^2}{2v'^2}} \quad (36).$$

en: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(v') dv' = 1.$

Hierin geeft $f(v') dv'$ de tijdsverhouding weer, dat v' ligt tussen v' en $v' + dv'$, dit is 1 wanneer de grenzen $\pm \infty$ zijn. Is nu $\sqrt{\bar{v}'^2}$ bekend, dan is $f(v')$ voor alle waarden van v' bekend.

Het van de bodem opgenomen materiaal moet echter ook afhankelijk zijn van de samenstelling van het bodemmateriaal. Daarom moet het gemiddelde bedrag aan zwevende deeltjes van een bepaalde korrelgrootte evenredig zijn met:

- 1e. het relatieve bedrag van deze deeltjes dat in de bodem aanwezig is;
- 2e. met de grootte van de aanwezige verticale snelheidscomponent, die in staat is deze deeltjes op te heffen;
- 3e. met de relatieve tijdsruimte, gedurende welke deze snelheidscomponent bestaat.

Aangenomen wordt nu, dat een verticale snelheid, die gelijk of groter is dan de valsnelheid van deze deeltjes, het materiaal in zweving zal brengen en houden. Het ligt nu voor de hand om de korrelgrootte van deze deeltjes te vervangen door de karakteristieke valsnelheid in stil water.

Het relatieve bedrag van deze deeltjes met een gemiddelde valsnelheid c kan afgeleid worden uit de zeeskromme van het bodemmateriaal. Bevat bijvoorbeeld het bodemmateriaal 50% met een valsnelheid c_1 of minder en 40% met een valsnelheid c_2 of minder, dan bestaat het dus uit een hoeveelheid materiaal met een valsnelheid:

$$c = \frac{1}{2} (c_1 + c_2) \text{ van } 50\% - 40\% = 10\%.$$

Stelt men nu dit relatieve bedrag voor door $\Delta F(c)$, dan is de gemiddelde verhouding waarin materiaal met een valsnelheid c wordt opgenomen evenredig met:

$$\Delta F(c) \cdot \int_0^{\infty} (v' - c) f(v') dv' \quad (37).$$

De rechtstreekse bepaling van $\sqrt{\bar{v}'^2}$ gaat bezwaarlijk, doch dit kan wel uit andere hydraulische factoren waarvan de term afhankelijk is.

De eenheid van schuifspanning op elk punt is volgens (2):

$$\tau = -\rho \overline{u'v'}.$$

In het algemeen gesproken is \bar{u}' evenredig met \bar{v}' en dus $\overline{u'v'}$ evenredig met \bar{v}'^2 .

Bij de bodem is dus τ_0 evenredig met $\rho \bar{v}'^2$ of $\frac{\tau_0}{\rho}$ (\therefore) \bar{v}'^2 ,

$$\text{dus is: } \sqrt{\bar{v}'^2} = k_1 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = k_1 \sqrt{gHI}.$$

Hierin is k_1 een evenredigheidsfactor. Er zijn aanwijzingen dat k_1 een constante waarde heeft voor turbulente stromen.

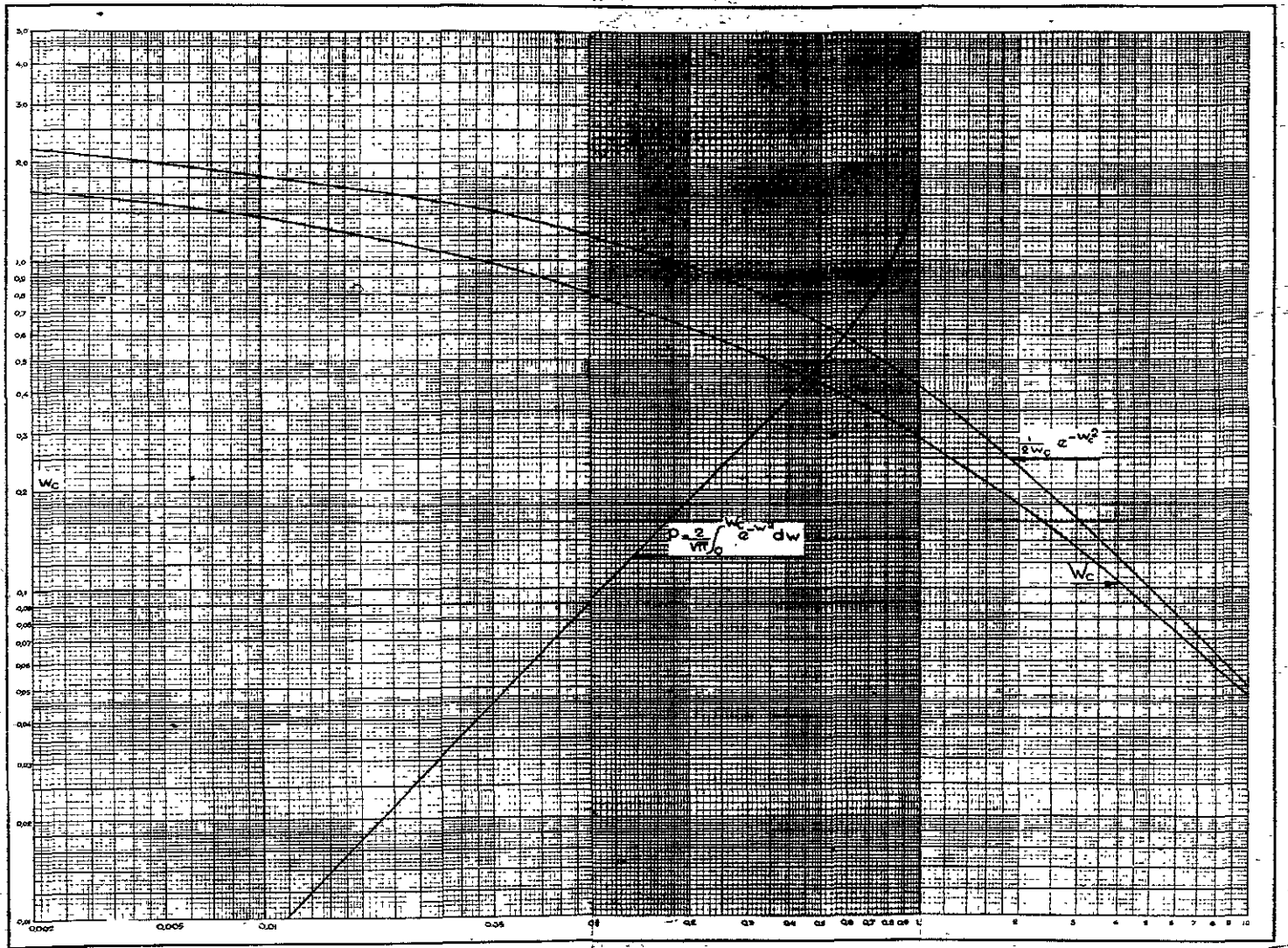
Substitueert men nu deze waarde voor $\sqrt{\bar{v}'^2}$ in (36) en dan (36) in (37) dan volgt:

$$\Delta F(c) \int_0^{\infty} (v' - c) \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_1 \sqrt{gHI}} e^{-\frac{v'^2}{2k_1^2 gHI}} dv'$$

Stelt men nu $\frac{v'}{\sqrt{gHI}} = t'$ en $\frac{c}{\sqrt{gHI}} = t_0$ dan is:

$$dv' = \sqrt{gHI} dt' \text{ en dus volgt:}$$

$$\Delta F(c) \frac{\sqrt{gHI}}{\sqrt{2\pi} k_1} \int_{t_0}^{\infty} (t' - t_0) e^{-\frac{t'^2}{2k_1^2}} dt' \quad (38).$$



Omdat er evenwicht wordt verondersteld moet dus cN_0 (:) (38)
 Immers stelt (38) het transport voor vanuit de bodem naar boven
 gedurende een zekere tijd en cN_0 het transport naar beneden per
 sec. ten gevolge van de zwaartekracht. En (37) stelt $\Delta F(c)$ in feite
 een gehalte voor, $(v' - c)$ een snelheid en $f(v') dv'$ een tijds-
 interval. (38) gaat dus over in:

$$\frac{N_0}{\Delta F(c)} = A \frac{1}{t_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi k_1^2}} \int_{t_0}^{\infty} (t' - t_0) e^{-\frac{t'^2}{2k_1^2}} dt'$$

A is de evenredigheidsfactor welke het verband aangeeft tussen
 de bovengedoelde tijdsinterval en de eenheid van tijd (sec).

Stelt men nu $\frac{t'}{\sqrt{2k_1^2}} = w$ en $\frac{t_0}{\sqrt{2k_1^2}} = w_0$ dan is $dt' = \sqrt{2k_1^2} dw$

dus gaat de laatste vergelijking over in:

$$\frac{N_0}{\Delta F(c)} = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_{w_0}^{\infty} \left(\frac{w}{w_0} - 1 \right) e^{-w^2} dw$$

$$= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{w_0}^{\infty} \frac{w}{w_0} e^{-w^2} dw - \left(\int_0^{\infty} e^{-w^2} dw - \int_0^{w_0} e^{-w^2} dw \right) \right\}$$

$$\frac{N_0}{\Delta F(c)} = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2w_0} e^{-w_0^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1-F) \right\} \quad (39)$$

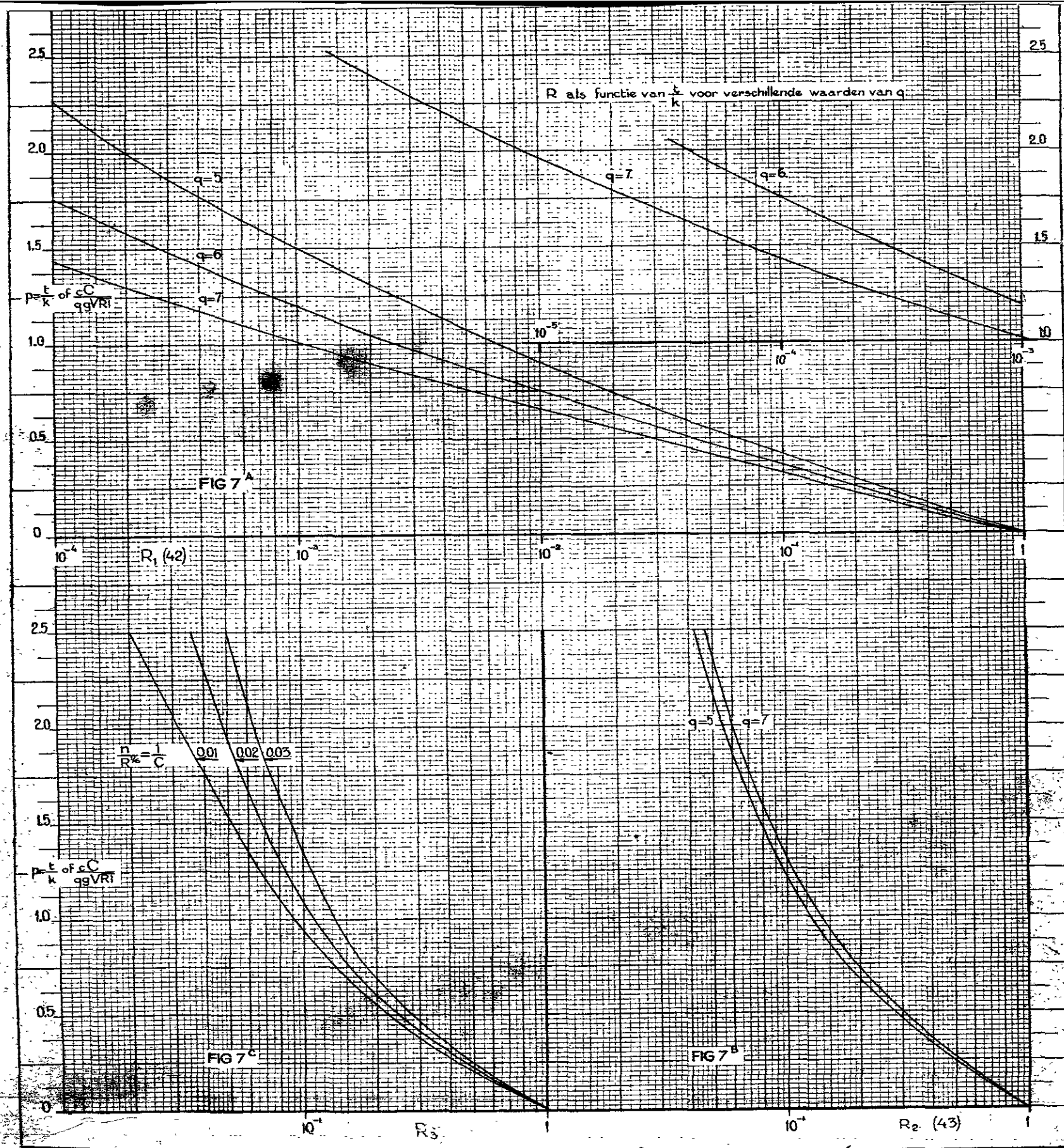
waarin F de waarschijnlijkheidsintegraal is $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{w_0} e^{-w^2} dw$ die

in tabelvorm gepubliceert is. De e -factor en F van (39) zijn
 grafisch weergegeven in figuur 6 voor verschillende waarden
 van w_0 . De vorm tussen de accoladen is dus te vinden en even-
 eens uitgezet in fig. 6 als W_0 .

Formule (39) kan men ook schrijven als:

$$\log \frac{N_0}{\Delta F(c)} = \log \frac{A}{\sqrt{\pi}} + \log W_0 \quad (40).$$

De vorm van deze formule zal in § 6 getoetst worden, terwijl de
 conclusies, welke uit deze formule getrokken kunnen worden in
 § 7 ter sprake komen.



§5. Het transport van zwevend materiaal.

Het moet nu dus mogelijk zijn om met behulp van de formules voor de zandgelalte- en stroomverticaal een formule op te stellen, waarmede het totale transport aan zwevend materiaal te bepalen is. Het zandtransport op een bepaalde hoogte vindt men door het zandgelalte en de stroomsnelheid op die hoogte met elkaar te vermenigvuldigen.

Er zal uitgegaan worden van de parabolische snelheidsverdeling (18) en de hieruit volgende gelalteverticaal (28a) en de benadering (32) of (33).

De logarithmische snelheidsverdeling en de hieruit volgende zandgelalteverticaal, respectievelijk (23) en (27) zijn voor dit doel niet geschikt omdat volgens deze formules

$$V_0 = -\infty \text{ en } N_0 = +\infty \text{ (zie ook § 7).}$$

Uit (18) volgt de relatieve snelheidsverticaal:

$$V_z = \frac{V_h}{V_m} = \frac{ah \frac{1}{q}}{\frac{q}{q+1} ah \frac{1}{q}} = \frac{q+1}{q} z^{\frac{1}{q}} \quad (41).$$

Het totale transport bij gebruik van (18) en (28a) wordt dus:

$$M = \int_0^1 N_0 \left\{ (1-z)^{\frac{1}{q}} e^{-(q+1)z^{\frac{1}{q}}} \right\}^{\frac{t}{K}} \frac{q+1}{q} z^{\frac{1}{q}} V_{gem} H dz$$

Deze integraal komt wat vorm betreft overeen met (29), zodat de volledige uitwerking hier achterwege gelaten kan worden.

Er volgt:

$$M = N_0 V_m H R_1 \quad (42).$$

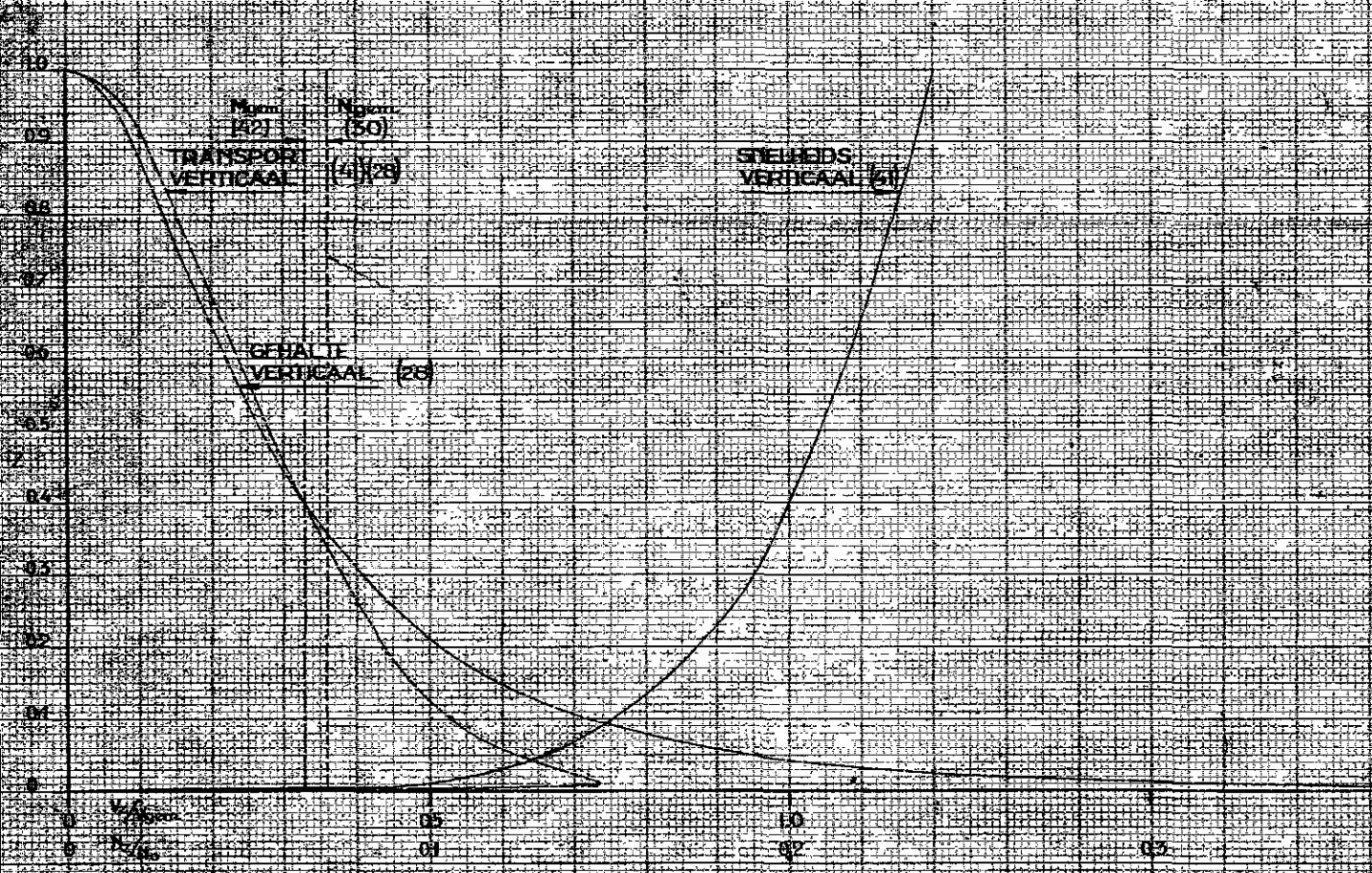
M : zandtransport per eenheid van tijd en van breedte.

$$R_1 = e^{-bp} \left\{ \left(1 + \frac{1}{q+2} bp + \frac{1}{(q+2)(q+3)} b^2 p^2 + \frac{1}{(q+2)(q+3)(q+4)} b^3 p^3 \dots \right) - \frac{1}{2p} \left(1 + \frac{1}{2q+3} bp + \frac{1}{(2q+3)(2q+4)} b^2 p^2 + \frac{1}{(2q+3)(2q+4)(2q+5)} b^3 p^3 \dots \right) \right\}.$$

$$b = (q+1) \text{ en } p = \frac{t}{K} \text{ of } \frac{qG}{qgVHt}$$

R_1 is voor verschillende waarden van q en p uitgezet in fig. 7a.

RELATIEVE
SNELHEIDS-ZANDGEHALTE-EN TRANSPORTVERTICALEN



RELATIEVE
SNELHEIDS-ZANDGEHALTE-EN TRANSPORTVERTICALEN
(BENADERING)

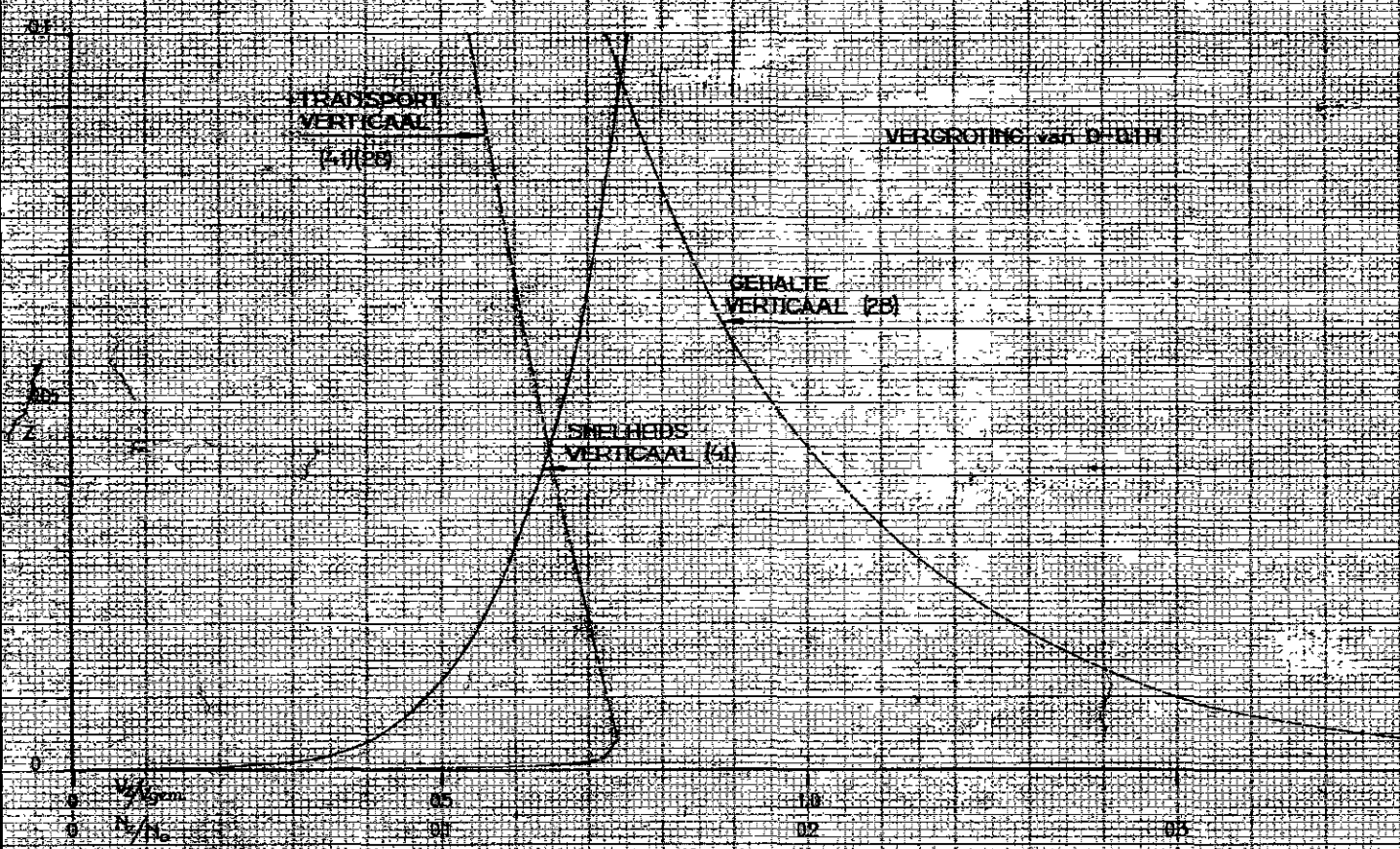
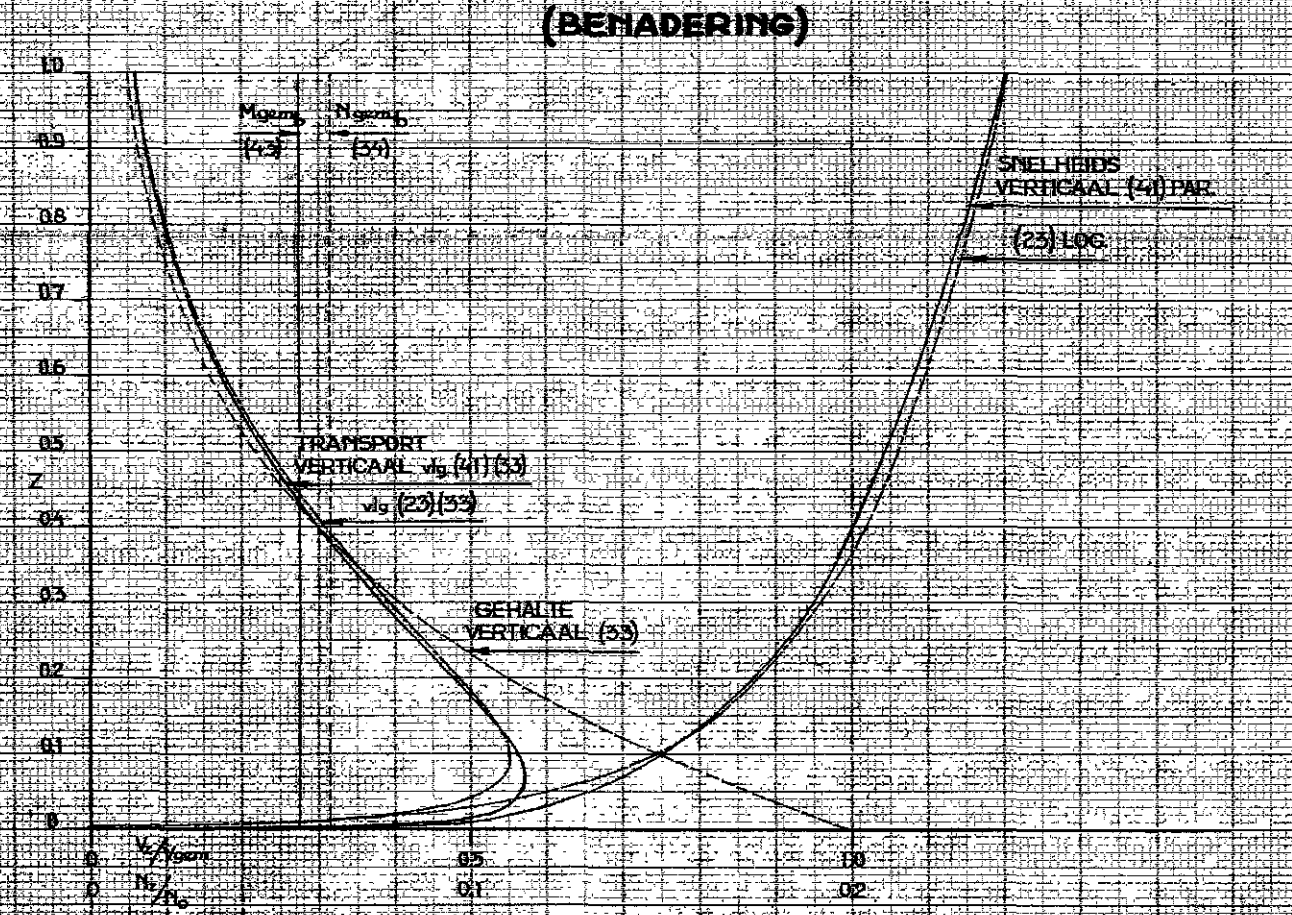


FIG 8

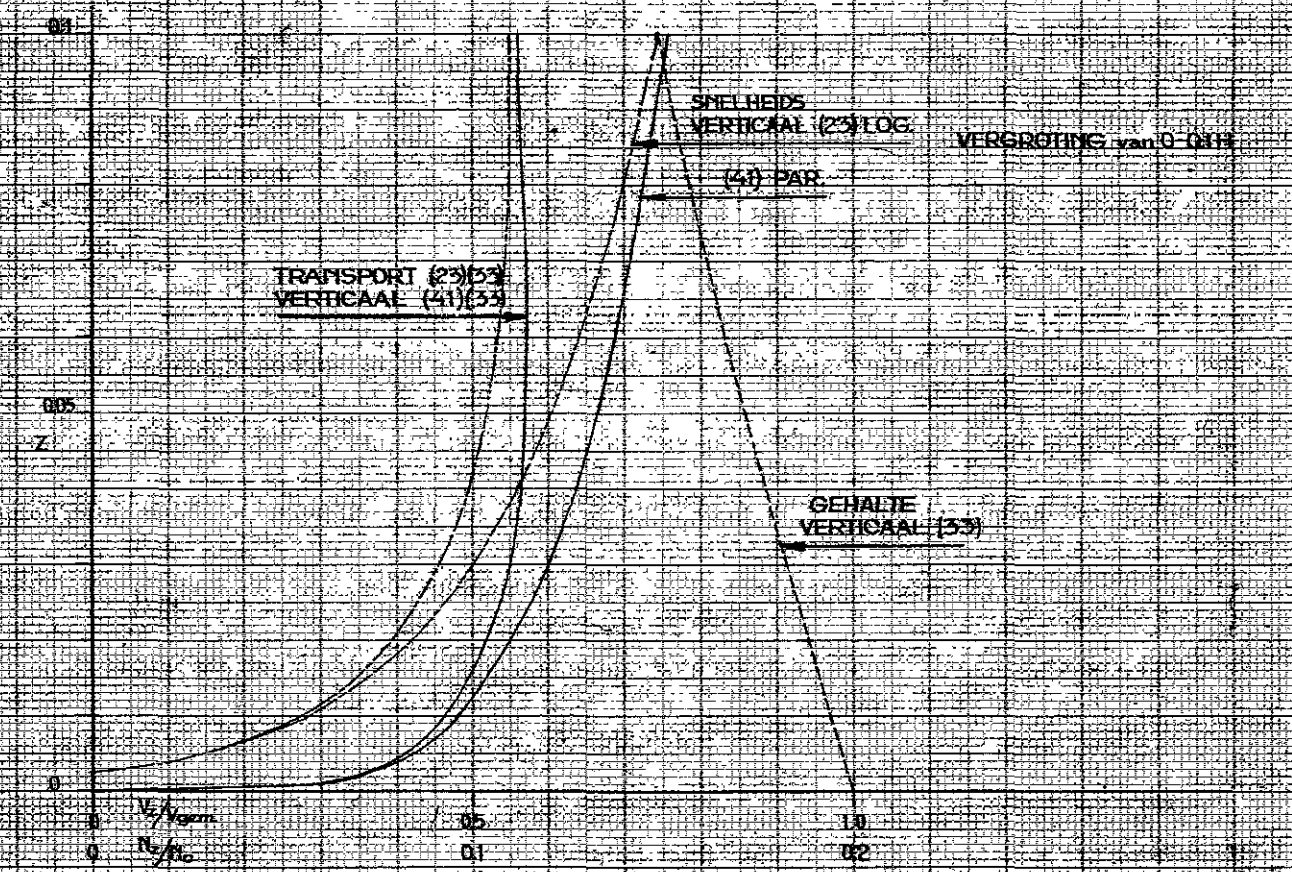


FIG 9

Voor de benaderde verticaal wordt:

$$M_b = \int_0^1 N_{ob} e^{-\frac{6z}{k}} \frac{q+1}{q} z^{\frac{1}{q}} V_m H dz$$

$$M_b = N_{ob} V_m H R_2 \quad (43).$$

$$R_2 = e^{-6p} \left(1 + \frac{q}{2q+1} 6p + \frac{q^2}{(2q+1)(3q+1)} (6p)^2 + \frac{q^3}{(2q+1)(3q+1)(4q+1)} (6p)^3 \dots \right)$$

$$p = \frac{t}{k} \text{ of } \frac{cG}{qgHI}$$

R_2 is voor verschillende waarden van q en p uitgezet in fig. 7b. Figuur 7c is overgenomen uit lit. 2 waar gebruik is gemaakt van de "logarithmische" formules. R_2 is bepaald door grafische integratie voor verschillende waarden van $\frac{t}{k}$ en G . Immers bevat de logarithmische snelheidsverdeling de term $\frac{\sqrt{cHI}}{kv_m} = \frac{\sqrt{g}}{kc}$, waardoor R_2 dus een functie wordt van $\frac{t}{k}$ en G , wanneer k tenminste niet verandert.

In figuur 8 zijn de ghalte- en snelheidsverticalen getekend met de daaruit volgende transportverticaal volgens (28) en (41). De laag nabij de bodem is vergroot weergegeven.

In figuur 9 en hetzelfde gedaan voor de benaderde krommen volgens (32) of (33) en de parabolische en logarithmische snelheidsverticalen.

Op deze figuren wordt nader teruggekomen in § 7.

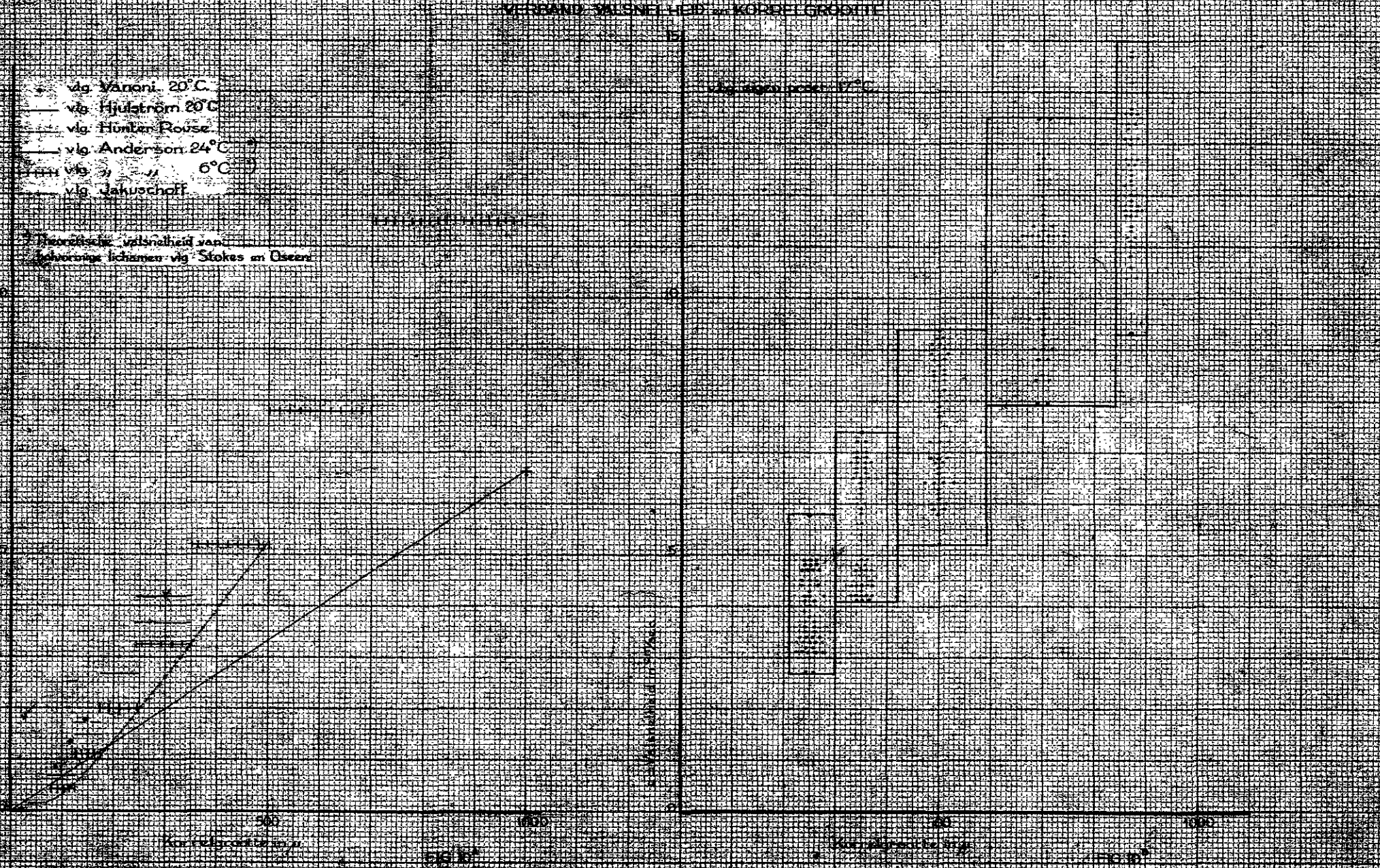
MESSE VAN SNEELHEID EN KOGELGROOTTE

- vlg. Vanoni 20°C
- vlg. Hjulström 20°C
- vlg. Hunter-Rouse
- vlg. Anderson 24°C
- vlg. " " 6°C
- vlg. Jakuschoff

20°C

Theoretische vallsnelheid van
gehörige lichamen vlg. Stokes en Oseen

20°C



§ 6 . Toetsing der formules.

Het is wenselijk eerst nader in te gaan op de valsnelheid van zand in stik water (ρ_0). Deze wordt bepaald door de korrelgrootte en -vorm, het verschil in soortelijk gewicht van vloeistof en zand, de viscositeit van de vloeistof en dus van de temperatuur. Hiervoor bestaan verschillende formules, doch deze slaan op zuiver bolvormige deeltjes en zijn voor ons doel minder geschikt, omdat zand vrijwel nooit een bolvormige korrel heeft. De valsnelheden, zoals deze door verschillende onderzoekers langs theoretische of empirische weg bepaald zijn, wijken onderling vrij sterk af. Dit is deels te verklaren, want een betrekkelijk rond afgeslepen korrel zal in zijn val minder weerstand ondervinden dan een hoekige korrel; ook bestaat er een verschil in soortelijk gewicht tussen de korrels onderling, omdat zand een heterogeen mengsel is.

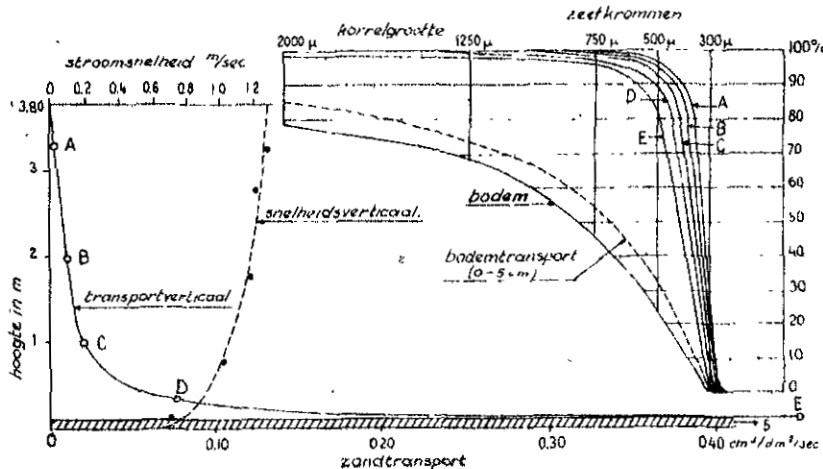
In figuur 10a zijn valsnelheden weergegeven volgens verschillende onderzoekers. Hieruit volgt dat de exacte bepaling van de waarde van c niet eenvoudig is. Aangezien de factor c in de formule een deel uitmaakt van de exponent, leidt een onnauwkeurige bepaling tot vrij grote verschillen in de uitkomsten.

Dezerzijds is een enkele proef genomen met een monster zand uit de benedenrivieren. Dit is uitgezeefd en van elke korrelgrootte-groep zijn van 50 korrels de afzonderlijke valsnelheden bepaald langs empirische weg. De resultaten zijn gegeven in figuur 10b. De spreiding in een bepaalde groep blijkt groter te zijn dan verklaard kan worden uit korrelgrootteverschillen; de oorzaak hiervan moet gelegen zijn in vorm- en soortelijk gewicht-verschillen. Stelt men zich dus een aantal korrels voor van dezelfde grootte, dan zullen de valsnelheden vrij sterk kunnen variëren, dat wil zeggen dat in stromend water de korrels met de kleine valsnelheden relatief meer tot zweving zullen komen dan die met grotere waarde voor c , hoewel de korrelgrootte gelijk is. Men zal dus, wanneer men de gemiddelde valsnelheid aanhoudt, iets aan de hoge kant zijn. Omdat de spreiding toeneemt met de korrelgrootte zal men voor grof materiaal iets meer moeten reduceren.

De in de vorige §§ afgeleide formules zullen nu getoetst worden op metaāgen, voorzover deze ter beschikking staan. In lit. 8,9

en 10 komen enkele voor dit doel geschikte metingen voor, die verricht zijn in de Neder-Rijn en in lit. 2, 3, en 12 betreffende de Mississippi en enkele zijrivieren.

In lit. 9 zijn een zandtransport- en snelheidsverticaal gegeven, waaruit dezerzijds een gehalteverticaal is gereconstrueerd. Tevens zijn de zeefkrommen van de verschillende hoogten gegeven. Een en ander is weergegeven in de uit lit. 9 overgenomen figuur 11. In de tekst is bovendien gegeven, dat de graad van de snelheidsverticaal = 7. Het verhang is gesteld op 0,00013.



Figuur 11.

Er zal hier de fractie met een gemiddelde korrelgrootte van 400 μ beschouwd worden en dan blijkt uit fig. 11:

| h | z | M_h | V_h | N_h | $\Delta F(c)_h$ in % | $N_{400\mu}$ |
|------|-------|-------|-------|-------|-------------------------|--------------|
| 0.10 | 0.027 | 45 | 0.80 | 56 | 75 | 42 |
| 0.35 | 0.09 | 7.5 | 1.00 | 7.5 | 100 | 7.5 |
| 1.00 | 0.265 | 2 | 1.08 | 1.9 | 70 | 1.35 |
| 2.00 | 0.53 | 0.9 | 1.20 | 0.8 | 30 | 0.24 |

h hoogte boven de bodem in m N_h zandgehalte in cc/m^3
 z relatieve hoogte $\frac{h}{H}$ $\Delta F(c)_h$ % met gemiddelde
 M_h zandtransport in $cc/m^2/sec.$ korrelgrootte van 400 μ
 V_h snelheid in m/sec. van het op de hoogte h
 gevangen zand.

De temperatuur van het water is niet gegeven. Aangenomen wordt nu in verband met de opmerkingen in de aanvang van deze paragraaf een valsnelheid van 0,05 m/sec. (zie. fig. 10)

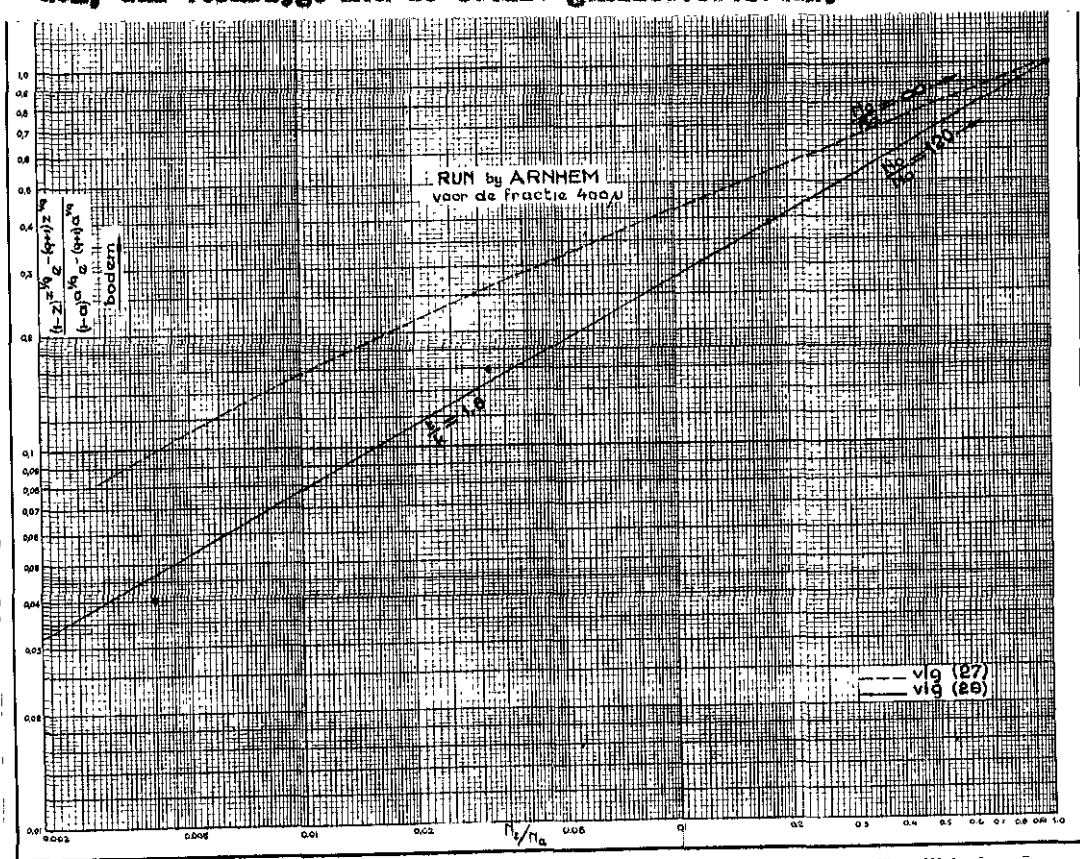
$$\frac{t}{K} = \frac{q}{E\sqrt{g}H} = \frac{0,05}{0,4\sqrt{9,81} \times 3,8 \times 0,00013} = 1,8$$

Vult men nu de bekende waarden in (28) in dan volgt aan de hand van fig. 3.

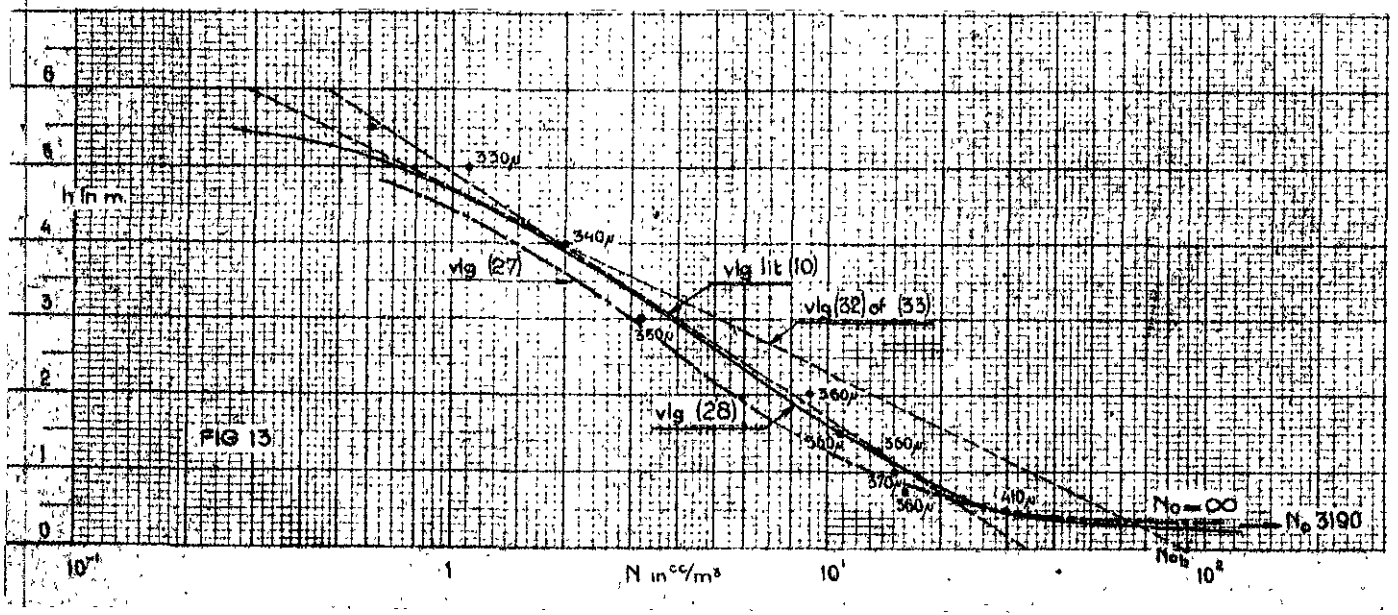
| | | | | |
|-----------------------|---------|------------------------|------------------|---------|
| $(1-z)^{\frac{1}{q}}$ | \cdot | $(q+1)z^{\frac{1}{q}}$ | is voor h = 0,10 | 0,00845 |
| | | | 0,35 | 0,00326 |
| | | | 1,00 | 0,00135 |
| | | | 2,00 | 0,00035 |

en stelt men $a = 0,027$, dus $h = 0,10$, dan is de vorm tussen de accoladen van (28) 1, 0,385, 0,16 en 0,04.

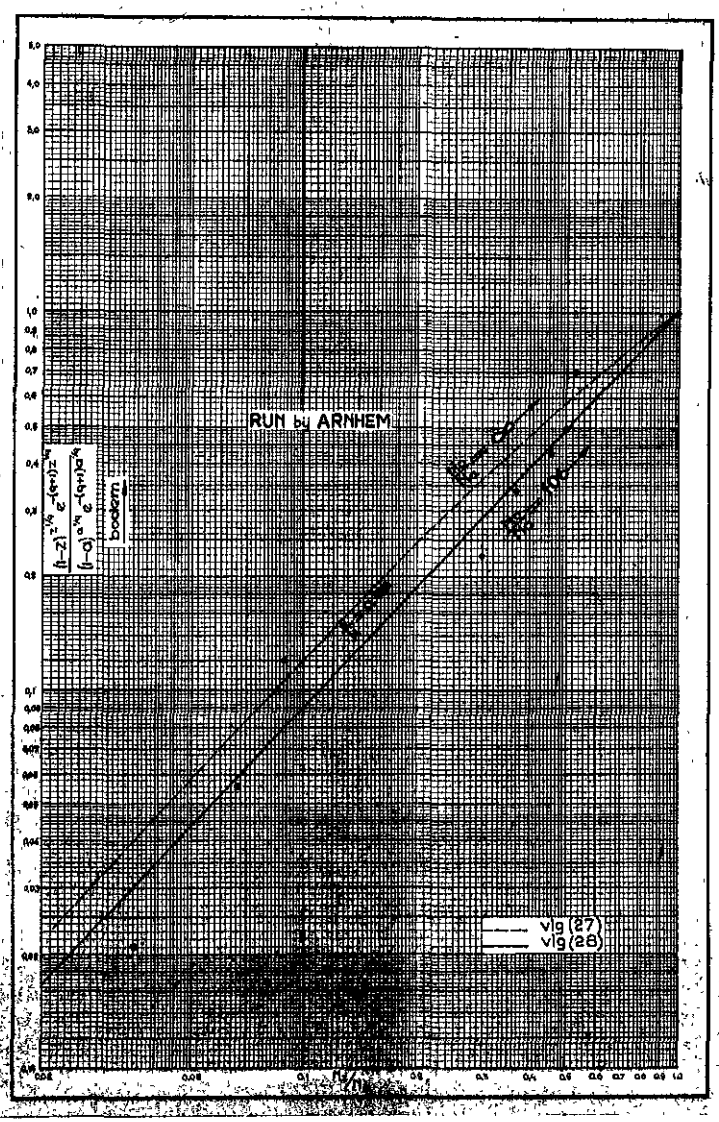
Zet men deze waarden uit tegen $\frac{t}{K}$ op dubbel logarithmisch papier en trekt men nu een lijn onder een helling $\frac{t}{K} = 1,8$, dan blijkt deze lijn, dus de theoretische gehalteverticalaal, te voldoen aan de gemeten waarden (zie fig. 12). Voert men deze berekening ook uit voor de niet beschouwde fracties, en sommeert men deze waarden, dan verkrijgt men de totale gehalteverticalaal.



Figuur 12.



Figur 13.



Figur 14.

In lit. 10 is een gehalteverticaal uit de Rijn bij Arnhem gepubliceerd welke voldoet aan de benadering.

$$N_{zb} = N_{ob} e^{4.2 z}$$

In figuur 13 is deze lijn getekend met de gemeten waarden (overgenomen uit lit.10). Tevens is gegeven dat $H = 6m$, $V_m = 1.35 m/sec.$ en $q = 6$. Temperatuur niet bekend. $N_{ob} = 35 cc/m^3$. Uit $k = \frac{q\sqrt{g}}{C}$ (zie bladzijde 17) volgt $C = 47$ en uit de formule van de Chézy volgt dan $I = 0.00014$. De korrelgrootte van het zwevende materiaal is blijkens figuur 13 $330 \text{ \AA} 360 \mu$, waarvan de valnelheid volgens figuur 10 gesteld kan worden op $0.035 m/sec$, zodat

$$\frac{t}{k} = \frac{0}{k\sqrt{gHI}} = \frac{0.035}{0.4\sqrt{9.81} \times 6 \times 0.00014} = 0.96$$

Bij gebruik van (28) en figuur 3 kan men op dezelfde wijze als bij het vorige geval de gehalte verticaal berekenen. Het resultaat is te vinden in figuur 14.

De overeenstemming is goed.

De berekening van het zandtransport geschiedt nu als volgt:

Men bepaalt voor het bovenstaande geval de theoretische waarde van N_o uit de gehalteverticaal en vindt dan $3190 cc/m^3$. In figuur 7a vindt men voor R_1 ongeveer 0.04 , dus formule (42) wordt:

$M = 3190 \times 1.35 \times 6 \times 0.04 = 103 cc/sec$, per m breedte voor het materiaal met een gemiddelde korrelgrootte van ongeveer 350μ . Laat men zich verleiden om hieruit een raming te maken naar het totale zwevende transport per jaar en stelt men de breedte die voor zandtransport in aanmerking komt op ongeveer $55 m$ (zie lit. 8) dan volgt een jaarlijks zwevend transport van $220.000 m^3$. Dit moet nog vermeerderd worden met het materiaal dat zich uitsluitend rollend verplaatst. Een benadering waarop hier niet nader kan worden ingegaan, omdat dit buiten het bestek van deze nota valt, geeft een orde van grootte van $75.000 m^3/jaar$. Volgens metingen komt Ir. E.M.H. Schaank in Lit. 8 tot een totale afvoer, welke ligt tussen $230.000 m^3$ bij gemiddelde toestand en $300.000 m^3$ bij hoge afvoeren.

Het aangehouden verhang duidt blijkens figuur 8 van lit. 8 op een waterstand van $10.00 m + N.A.P.$, dus ruim $1 m$ boven MR; het hier beschouwde slaat dus op een tamelijk "nat" jaar.

De orde van grootte is dus goed.

Van de hand van dit geval zal nu worden aangegeven, dat men met de benaderingsformules (32) en (33) voorzichtig moet zijn, zoals twee eerder is opgemerkt.

$$N^{op} = N^{op} e^{-\frac{6}{t} z} - 5.8 z$$

N^{op} vindt men door M_p gelijk te stellen aan M en gebruik te maken van (43). R^2 is volgens figuur 7b 0.14. Uitgemerkt vindt men dan $N^{op} = 91 \text{ cc/m}^3$. Deze lijn is in figuur 13 getrokken en gelijkwaardig aan de boven berekende gehaltenverloop in die zin dat beide tot hetzelfde transport leiden. Men ziet echter dat de helling van de benaderde lijn zodanig is, dat deze niet door de gemeten punten gaat.

De term $\frac{K}{t}$ moet dus gereduceerd worden om een lijn te verkrijgen die door de gemeten punten gaat, en wel tot $4.4 \frac{K}{t}$. De term 4.4 is te vinden door het stellen deel van de verlossing volgens (28) gelijk te stellen aan (33), waarin 6 vervangen wordt door x , het stellige deel neemt men tussen de grenzen $x = 0.15$ en $x = 0.2$.

Men ziet tevens dat beneden 0.2 H en 0.75 H de afwijking van een benaderingsformule te groot wordt. Men mag dus met deze formule niet verder rekenen omdat de fout in het belangrijke gebied, dat men bij gebruik van de valshnelheden van Hysterom (zie fig. 10a) een een waarde van t komt, die ingevuld in (33), een lijn geeft, die gelijk is aan de hierboven benaderde gereduceerde lijn.

$$N^{zp} = N^{op} e^{-4.4 \frac{K}{t} z} - N^{op} e^{-\frac{6}{t} z} - 4.2 z$$

en dit stemt overeen met de gemeten waarden en de in lit. 10 gegeven empirische lijn. Nogmaals wordt er met nadruk de aandacht op geweend dat deze lijn in het gebied nabij de bodem niet volgt, wel boven ongeveer 0.15 \pm 0.20 H , en men dus niet het transport mag bepalen van de hand van deze formule. Men zal dan voor het onderhevige geval vinden:

$$M^p = N^{op} V^m H R^2 = 40 \text{ cc/sec. per m breedte, dus een jaar-}$$

transport van 96.000 m³ en dit is niet in overeenstemming met de metingen.

In lit. 2 staan enkele gegevens over de Mississippi.

Voor het hier te beschouwen geval geldt:

H = 10.35 m, I = 0.00071 V_m = 1.56 m/sec. Temp. 17°C, graad snelheidsverticaal q = 6, korrelgrootte zwevend materiaal 75 - 250 μ. De resultaten van de zandmeting waren:

| h | z | N cc/m ³ |
|-------|--------|---------------------|
| 0.183 | 0.0177 | 17.1 |
| 1.65 | 0.159 | 9.9 |
| 3.32 | 0.322 | 4.6 |
| 5.46 | 0.529 | 4.2 |
| 7.50 | 0.735 | 2.5 |
| 10.05 | 0.97 | 1.1 |

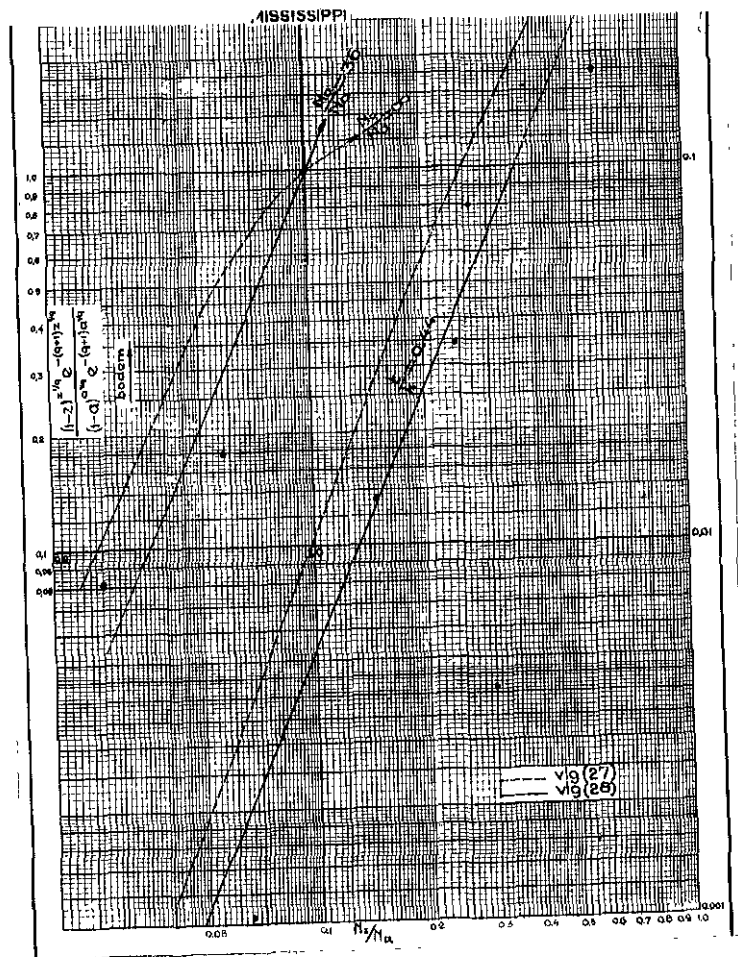
De gehalteverticaal is nu te berekenen volgens (28) en fig. 3.

Voor c is genomen de dichtst bij de bodem gelegen meting.

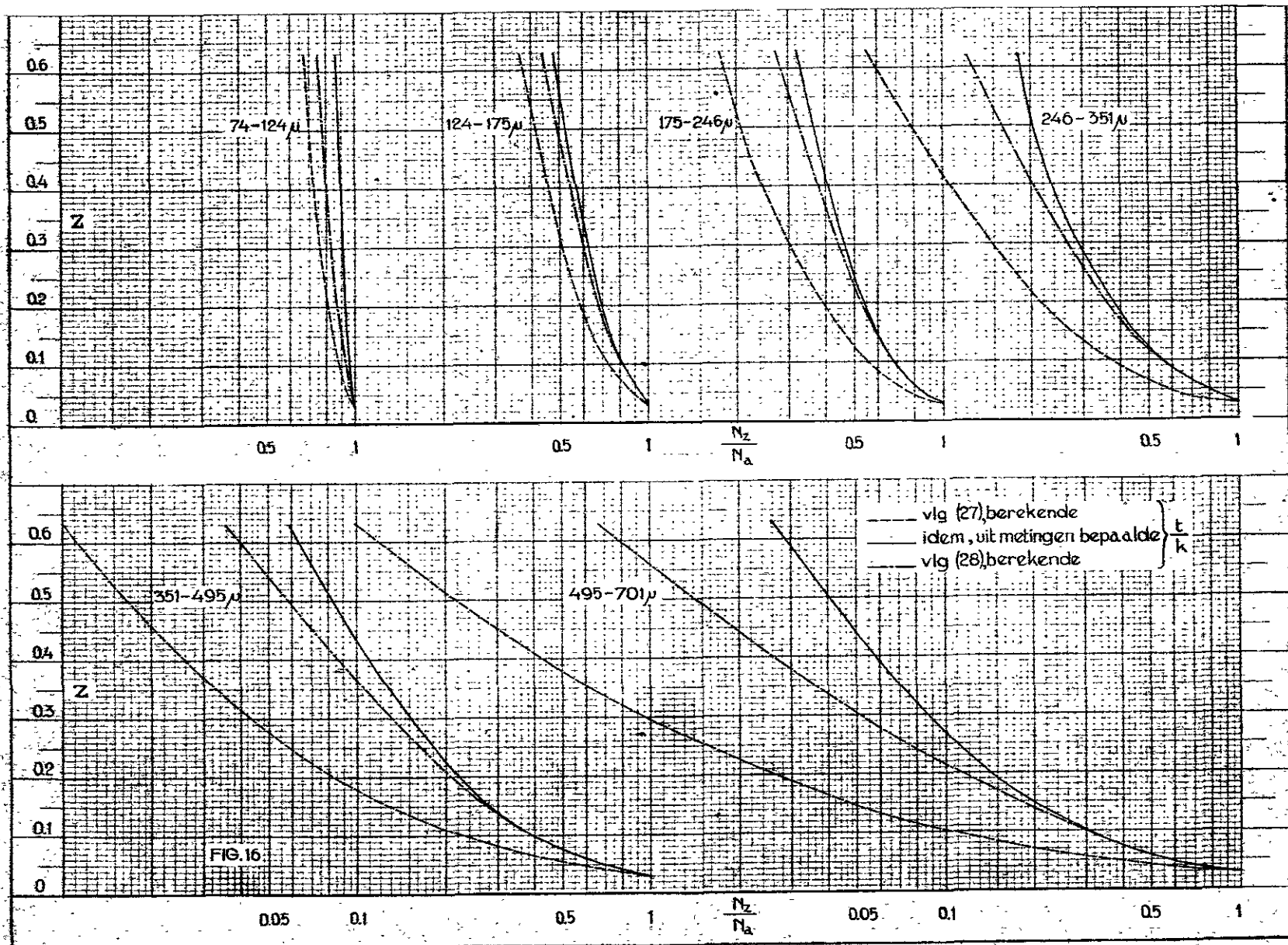
Volgens fig. 10a is c = 0.015 m/sec., dus:

$$\frac{t}{E} = \frac{c}{K \sqrt{g H I}} = \frac{0.015}{0.4 \sqrt{9.81 \times 10.35 \times 0.00071}} = 0.44$$

Na uitwerking is figuur 15 samen te stellen, waaruit de overeenstemming met de metingen blijkt.



Figuur 15.



Tot nu toe is de gehalteformule, volgens uit de logarithmische snelheidsverdeling, nog niet getoetst. Deze formule (27) is in Amerika gebruikelijk. Men heeft daar diverse publicaties aan deze formule gewijd, doch men komt steeds weer tot de conclusie, dat delijn wel qua vorm voldoet, doch dat de verhoudingen in de verticale in werkelijkheid hoger zijn dan uit de formule zou volgen. Een verklaring van dit feit heeft men niet kunnen vinden, al zijn er wel verschillende veronderstellingen gemaakt. Op de feitelijke oorzaak zal in § 7 worden teruggekomen.

In lit. 12 is een serie metingen gepubliceerd die verricht zijn in de Knores River, een riviertje met een diepte van ongeveer 1,5 m. Formule (27) wordt hierop getoetst en men vindt vrij grote verschillen. Nu zal de dezerzijds ontwikkelde formule (28) op deze metingen worden toegepast, zodat het verschil van beide formules tot uitdrukking wordt gebracht. Het punt van uitgang a is gesteld op 0,02 H.

Het onderstaande staatje is uit lit.10 overgenomen.

| \sqrt{gRI} | fractie | $6^{\circ} C$ | $\frac{t}{K}$ berekend | $\frac{t}{K}$ gemeten |
|--------------|---------------|---------------|------------------------|-----------------------|
| 0,112 | 74-124 μ | 0,0046 | 0,100 | 0,037 |
| | 124-175 μ | 0,011 | 0,251 | 0,180 |
| | 175-246 μ | 0,020 | 0,445 | 0,289 |
| | 246-351 μ | 0,033 | 0,722 | 0,461 |
| | 351-495 μ | 0,052 | 1,150 | 0,715 |
| | 495-701 μ | 0,078 | 1,740 | 0,910 |

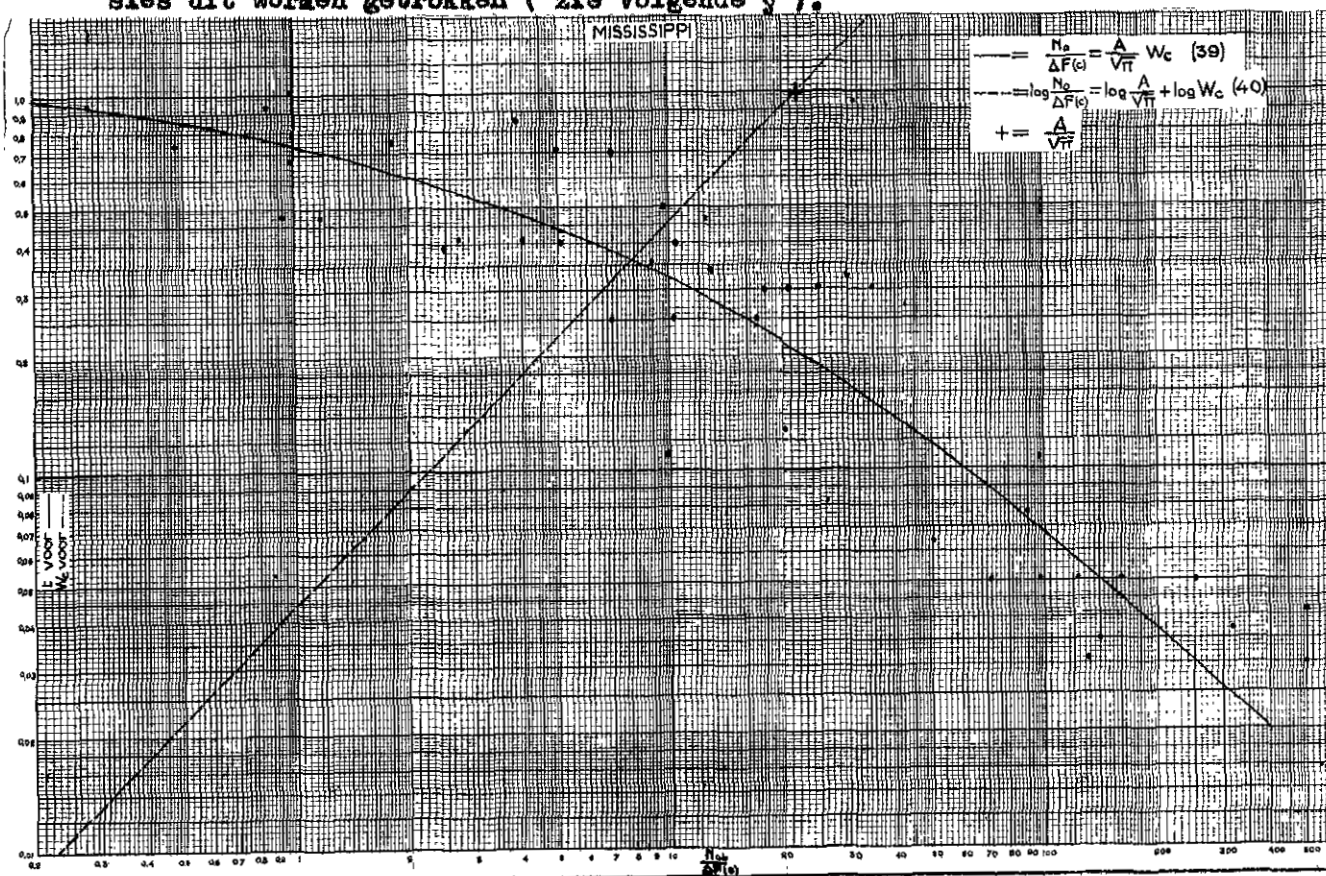
Hieruit blijkt dat er geen overeenstemming is tussen de berekende en gemeten waarde van $\frac{t}{K}$ voor formule (27).

Nu zal (28) met de berekende waarde voor $\frac{t}{K}$ worden toegepast. Uit de snelheidsverticalen bleek dat deze van ongeveer de 3° graad zijn. In figuur 16 zijn de gemeten en de respectievelijk met (27) en (28) berekende verticalen uitgezet voor de theoretische waarde van $\frac{t}{K}$. Formule (28) blijkt veel beter te voldoen dan (27). Opgemerkt wordt dat voor σ de theoretische valsnelheden zijn gebruikt voor bolvormige korrels. In werkelijkheid zal σ lager zijn, zodat de overeenstemming ongetwijfeld beter zal zijn. Ook een geringe verlaging van q heeft hetzelfde resultaat. Een nauwkeurige bepaling van q was niet mogelijk omdat slechts een gedeelte van de snelheidsverticaal was gegeven. De aangehouden waarden 3 is een benadering van het gemiddelde. In ieder ge-

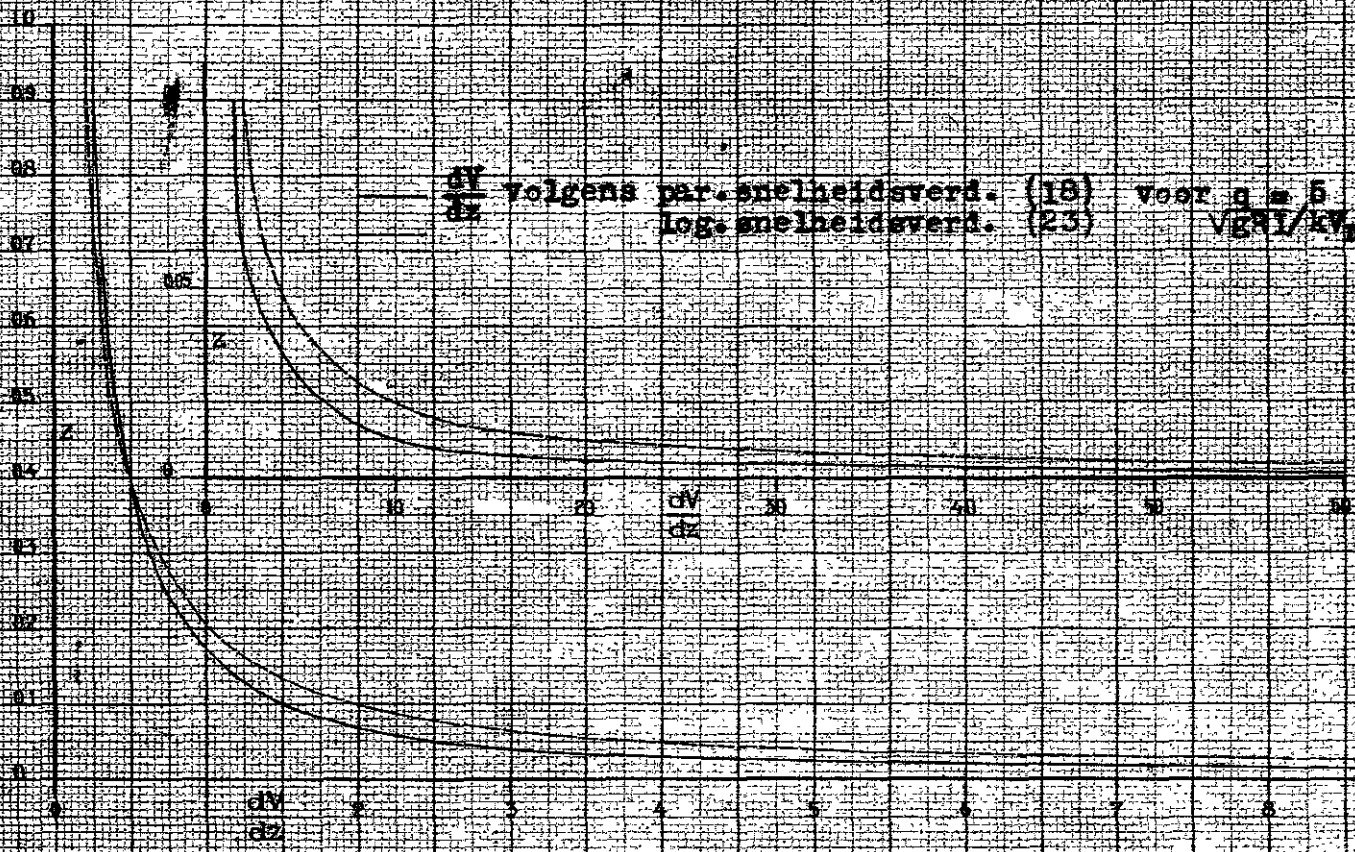
val is het verschil tussen (27) en (28) duidelijk aangetoond. Er rest nu nog de toetsing van formule (39), die dient voor de bepaling van N_0 . De waarde van de termen k en A zijn niet bekend en zullen dus uit de metingen bepaald moeten worden. Dezerzijds stonden geen metingen, ter analisering, in bovenrivieren ter beschikking. Echter heeft men dit in Amerika wel gedaan voor de benaderingsformule (33) (lit. 2). Omwerking tot (28) is niet mogelijk, omdat niet na te gaan is welke valsnelheden gebruikt zijn, met andere woorden of de waarde van t exact is vastgesteld. Ook staan de metingen niet ter beschikking, doch alleen het eindresultaat is gegeven. Dit is overgenomen in figuur 17. Men moet hierin dus slechts een richtlijn zien.

Bij vergelijking van figuur 6 en 17 blijkt wel dat de vorm van (39) goed is. Denkt men nu in (39) bij alle termen de indice b (= benaderd) dan volgt met behulp van (40) voor $A = 39$ en $k_1^2 = 0.27$. A bepaalt de verschuiving van de lijn naar links of rechts, terwijl k_1 de vorm van de lijn beïnvloedt. Is k_1 goed gekozen, dan zal men een rechte lijn onder 45° verkrijgen wanneer men (40) uitzet. $\frac{A}{\sqrt{\pi}}$ vindt men dan door aflezing van deze lijn op $W_c = 1$. (zie fig. 17).

Al mag men aan deze lijn geen absolute waarde hechten, zoals boven is opgemerkt, kunnen er toch enkele belangwekkende conclusies uit worden getrokken (zie volgende §).



Figuur 17.



$\frac{dV}{dz}$ volgens par. snelheidsverf. (18) voor $g = 5$ $\frac{dV}{dz}$ volgens
 log. snelheidsverf. (23) $\frac{dV}{dz}$ volgens

$\frac{dV}{dz}$ volgens

| z | (18) | (23) |
|-------|----------|----------|
| 1 | 0.24 | 0.20 |
| 0.9 | 0.26 | 0.22 |
| 0.8 | 0.29 | 0.25 |
| 0.7 | 0.32 | 0.29 |
| 0.6 | 0.36 | 0.33 |
| 0.5 | 0.42 | 0.40 |
| 0.4 | 0.50 | 0.50 |
| 0.3 | 0.62 | 0.67 |
| 0.2 | 0.87 | 1.00 |
| 0.1 | 1.50 | 2.00 |
| 0.05 | 2.53 | 4.0 |
| 0.01 | 10.00 | 20.00 |
| 0.001 | 60.00 | 200.00 |
| 0 | ∞ | ∞ |

FIG. 18

Handwritten marks and a signature in the bottom right corner.

§ 7. Beschouwing der afgeleide formules.

Uit (10) volgt dat de snelheidsgradient voor de bepaling van de uitwisselingscoëfficiënt, zeer belangrijk is. Hoe groter $\frac{dv}{dh}$ hoe kleiner de uitwisselingscoëfficiënt C , des te minder zand zal tot zweving komen. Er zijn twee gehalteformules afgeleid, namelijk dezerzijds uit de parabolische en in Amerika uit de logaritmische snelheidsverdeling. Gebleken is dat de laatste tot te lage waarden voert. Tot nog toe heeft men dit niet kunnen verklaren, hoewel er verschillende hypothesen voor zijn opgesteld.

Beziet men de formule voor de logaritmische snelheidsverdeling, dan valt op dat vooreen hoogte 0 een snelheid van ∞ volgt (zie ook figuur (9)). Nabij de bodem geeft deze formule dus in geen geval de werkelijke toestand weer, wel in de hogere lagen. Voor berekeningen betreffende de waterbeweging is de laag nabij de bodem zeer onbelangrijk en zal deze formule dus zeer wel voldoen, doch voor de zandbeweging is het gebied nabij de bodem beslissend. Zeer duidelijk blijkt dit uit figuur 18, waar $\frac{dv}{dh}$ voor beide snelheidsverticalen is uitgezet. Nabij de bodem blijkt de afgeleide van de logaritmische snelheidsverticaal een veelvoud te zijn van de afgeleide van de parabolische snelheidsverticaal, dus is de ene uitwisselingscoëfficiënt kleiner dan de andere, met andere woorden volgens de logaritmische gehalteverticaal komt er minder zand tot zweving dan volgens de parabolische en zal dus formule (27) tot te lage waarden voeren. Dit is gebleken. Nu heeft men dit bezwaar van de logaritmische snelheidsverticaal wel trachten te ondervangen, door nabij de bodem een zogenaamde grenslaag aan te nemen, waarin een laminaire stroom heerst en men komt dan tot een formule, waarbij v_0 gelijk aan 0 wordt; deze gedachtengang is echter voor ons doel minder geschikt omdat laminaire ^{stroming} turbulentie uitsluit en juist de turbulentie veroorzaakt de uitwisseling.

Hierbij komt dat deze gewijzigde formule buitengewoon gecompliceerd is. De parabolische snelheidsverdeling heeft deze bezwaren niet, al is deze formule niet wetenschappelijk af te leiden, toch heeft hij in de praktijk bewezen zeer dicht nabij de werkelijkheid te komen en is bovendien zeer eenvoudig (lit. 7). Het is echter duidelijk dat de graad van de snelheidsparabool niet willekeurig is. Tot op heden is nog niet vastgesteld waarvan q afhankelijk is.

De logarithmische snelheidsverdeling, zoals deze ontwikkeld is door Prandtl - von Kármán, is als exact te beschouwen, doch voldoet dicht nabij de bodem niet, zoals reeds eerder is opgemerkt. Aan de hand van deze formule is dus de verticale snelheidsverdeling uit de hydraulische factoren te berekenen in tegenstelling met de parabolische snelheidsverdeling.

Nu volgt uit de logarithmische snelheidsverdeling (25):

$$\frac{V_{\max}}{V_m} = 1 + \frac{\sqrt{gRI}}{kV_m}$$

en uit de parabolische formule (18):

$$\frac{V_{\max}}{V_m} = \frac{q+1}{q}$$

Hieruit volgt, omdat V_m en V_{\max} buiten het bodengebied liggen:

$$q = \frac{kC}{Vg}$$

Nu is k voor schoon water te stellen op 0.38 à 0.40, zodat rondweg volgt:

$$q = \frac{1}{8} C$$

Hier is q dus wel uit de hydraulische factoren te bepalen.

Opgemerkt dient te worden dat in zout water de toestand anders is, omdat zoals zal blijken k afneemt met de toename van het soortelijk gewicht.

Voor bovenrivieren komt men dus op een waarde voor $q = 6$ à 7 en voor benedenrivieren en zeegaten lager, hetgeen in overeenstemming is met de waarnemingen.

Uit bovenstaande volgt dus dat q afneemt met de toename van de weerstand en omgekeerd.

Denkt men zich een wrijvingloze strooming in dan zal de snelheid op elke hoogte dezelfde zijn of wel $q = \infty$, de volheidsfactor van de parabool $\frac{q}{(q+1)}$ nadert tot 1

Omgekeerd wijst een afname van q op een grotere weerstand, wat op zijn beurt weer het gevolg is van een grotere wrijving. neemt de wrijving toe, dus vermindert q , dan zal ook de zandbeweging toenemen. Dit wordt bevestigd door fig. 3.

Aangezien de uitwisselingscoëfficiënt in (15) onder het integraalteken voorkomt, zal een fout, bij de bodem gemaakt, een eu-

mulatief effect over de gehele hoogte hebben.

De hierboven besproken onwaarschijnlijkheid in de logarithmische snelheidsverdeling heeft nog een ander effect op de hieruit afgeleide gehalteverticaal (27), namelijk dat $N_0 = \infty$ ($a=0$). Een gehalte kan echter niet oneindig groot zijn.

Het zal duidelijk zijn dat elke snelheidsverdeling, welke tot zeer dicht nabij de bodem voldoet, tot een goede gehalteverticaal moet leiden.

In lit. 6 heeft Vanoni de resultaten van een ^{serie} laboratoriumproeven gegeven. Hij is uitgegaan van de logarithmische snelheidsverdeling en (27). Deze experimenten zijn verricht in een goot van 85 cm breed en een waterdiepte variërende van 7 - 17 cm. Aan de hand van de resultaten doet hij een aantal veronderstellingen ter verklaring van de afwijkingen met (27) en hij trekt bovendien een aantal belangwekkende conclusies. De belangrijkste zullen hier aan de hand van enkele, uit zijn verhandeling overgenomen figuren, besproken worden.

Het eerst waargenomen effect was de reductie van de kanaalweerstand (zie fig. 19 en 20 en tabel 2), dus V_{gem} neemt toe en k neemt af

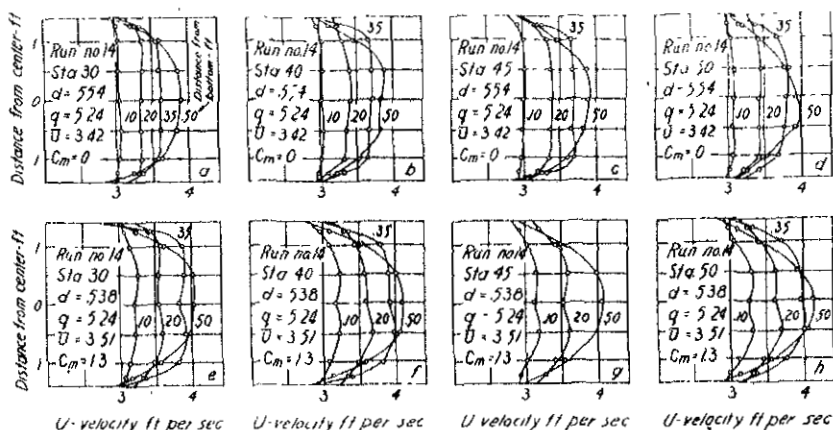


Fig. 6--Typical velocity-distribution curves over cross-section of flume

Figuur 19.

zodra er zand in het water tot zweving komt. Een afname van k betekend een grotere waarde voor $\frac{dV}{dh}$ voor een gegeven τ en dus zal op iedere hoogte de snelheid toenemen. Uit (10) volgt dat bij een constante τ en een toename van $\frac{dV}{dh}$ de uitwisselingscoëfficiënt moet afnemen. Het dempend effect van de aanwe-

zigheid van zwevend materiaal op ζ is gemakkelijk voor te stellen: teneinde het zand zwevende te houden, wat opheffing van de valnelheid betekent, moet de stroom arbeid verrichten, Deze

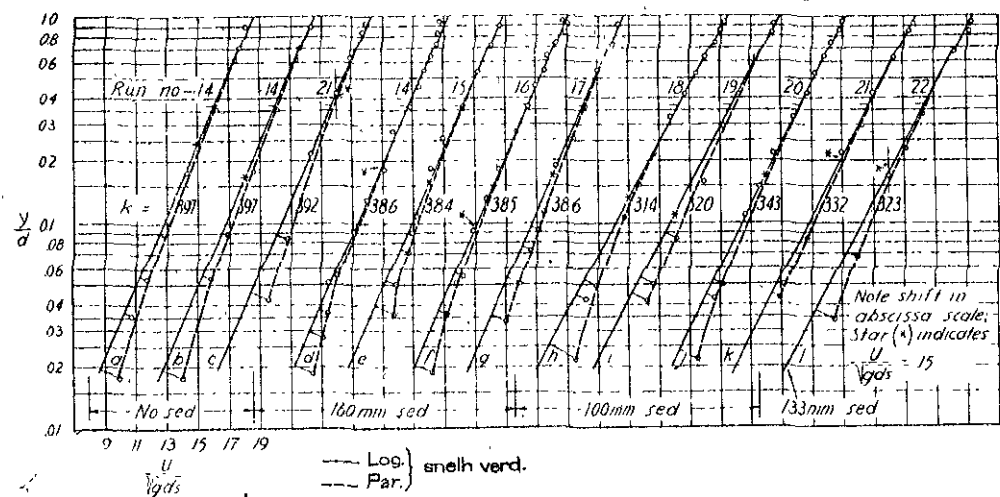
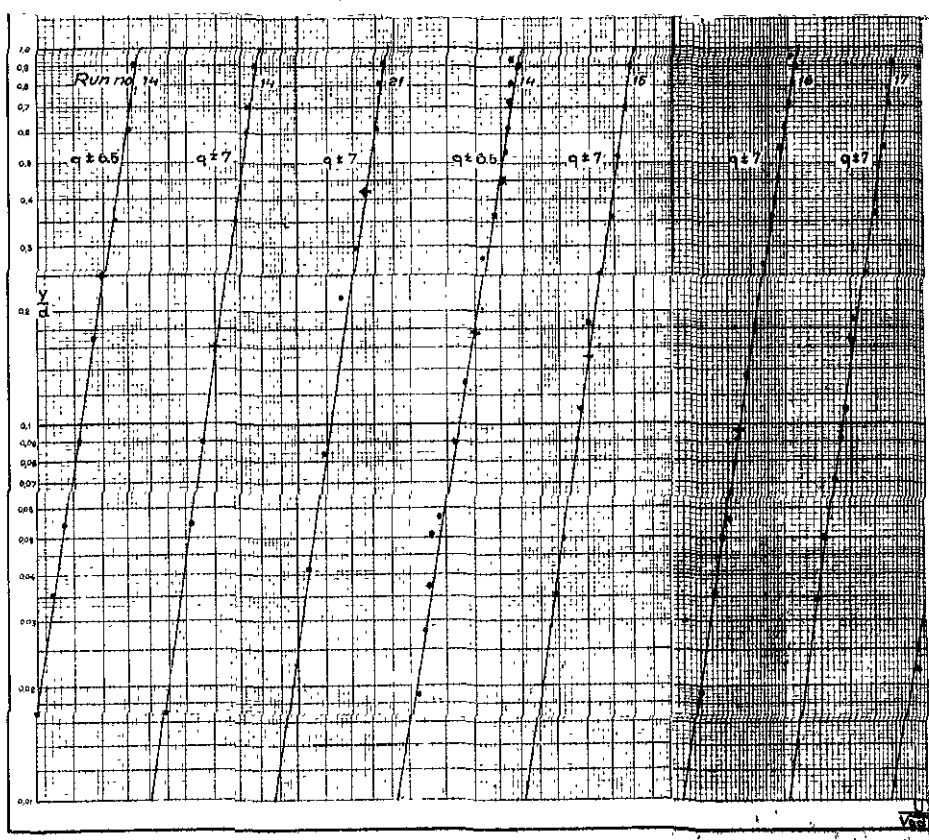


Fig. 7--Semi-logarithmic plot of velocity-profiles on center of flume

Figuur 20.

energie moet geleverd worden door de verticale componenten van de



Figuur 21r

turbulentsnelheid en deze energie-overdracht zal er toe bijdragen dat de turbulentie sneller gedempt wordt dan in schoon

water en omdat ϵ ook varieert met de turbulentiëfluctuaties, zal dus ook ϵ gedempt worden. Het zal nu duidelijk zijn dat de grootste damping te verwachten is bij afzetting van materiaal, omdat dan de laag nabij de bodem de grootste dichtheid heeft. Naarmate N toeneemt daalt k . Dit dempend effect is afhankelijk van N en e .

Table 2--Resistance-coefficient with and without suspended load
(For laboratory flume 2.77 feet wide)

| Run No. | d, feet | V, f.p.s. | n | $\frac{n_w}{n_s}$ | f | $\frac{f_w}{f_s}$ | Sed.-diam., mm | \bar{c} , % | Rel. rough. |
|---------|---------|-----------|-------|-------------------|-------|-------------------|----------------|---------------|-------------|
| | .496 | 3.49 | .0108 | 1.00 | .0192 | 1.00 | None | 0.0 | 340 |
| 8-10 | .484 | 3.62 | .0105 | 1.03 | .0179 | 1.07 | .160 | 0.16 | 330 |
| 17-20 | .475 | 3.64 | .0103 | 1.05 | .0172 | 1.12 | .160 | 0.33 | 320 |
| 14 | .554 | 3.58 | .0113 | | .0201 | | None | 0.0 | 190 |
| 14 | .538 | 3.65 | .0108 | 1.05 | .0187 | 1.07 | .160 | 0.13 | 185 |
| 18 | .462 | 2.28 | .0114 | | .0215 | | None | 0.0 | 160 |
| 18 | .462 | 2.52 | .0103 | 1.11 | .0176 | 1.22 | .100 | 0.12 | 160 |
| 20 | .461 | 3.16 | .0117 | | .0224 | | None | 0.0 | 160 |
| 20 | .462 | 3.30 | .0112 | 1.04 | .0205 | 1.09 | .100 | 0.11 | 160 |
| 21 | .234 | 2.05 | .0124 | | .0306 | | None | 0.0 | |
| 21 | .234 | 2.27 | .0113 | 1.10 | .0250 | 1.22 | .100 | 0.11 | 80 |

Note: n_w and f_w = coefficients with clear water; n_s and f_s = coefficients with suspended load.

n = constante van Manning
 C = gem. gehalte = N_m
 indice w = water
 s = zand

Tabel 2.

dus hoe groter N en e des te meer damping. Ook de afname van de kanaalweerstand is duidelijk te constateren (zie tabel 2) uit de vermindering van de constante van Manning n .

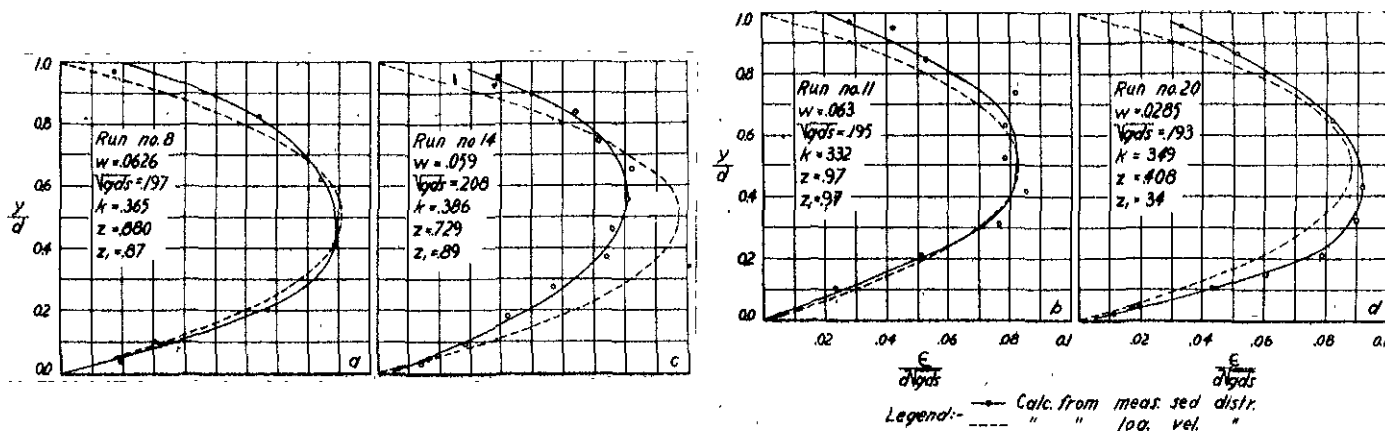
Het voorkomen van meer zand dan volgens (27) volgt, tracht Vanoni te verklaren onder andere uit het feit dat toevallige turbulenties in staat zijn korrels te verplaatsen, met andere woorden de uitwisselingscoëfficiënt ϵ is in werkelijkheid iets groter. Tot zover dit lezenswaardige artikel.

Dezerzijds is de vraag gerezen of deze beschouwing echter wel geheel juist is. Vanoni gaat namelijk uit van een constant gebleven verhang, waarvoor hij de helling van de gootbodem nam. Het is zeer waarschijnlijk dat de benodigde energie voor de zandbeweging geheel of gedeeltelijk geleverd wordt door de toename van helling der energielijn waardoor de term \sqrt{RI} verandert ten gevolge van de toename van I en afname van R . In dat geval zal de reductie van k in mindere mate of in het geheel niet plaatsvinden. De wijziging van \sqrt{RI} heeft echter tevens een wijziging van τ_0 tengevolge. Bestaat deze wijziging in een reductie (wat wel waarschijnlijk is) dan wordt ook τ_0 gereduceerd waardoor de

sleepkracht is dus vermindert. In dat geval zal er een transportlimiet kunnen bestaan. Hoe het ook zij, wel duidelijk blijkt de onderlinge wisselwerking van de water- en zandbeweging.

Ook wordt hier nog even de aandacht gevestigd op het niet voldoen van de logarithmische snelheidsverticaal aan de werkelijkheid, wat in figuur 20 wel duidelijk gedemonstreerd wordt. De afwijking in de onderste lagen is zelfs voor de zeer geringe diepte en de proefgoot duidelijk zichtbaar. In fig. 21 zijn dezelfde snelheidsverticalen getekend. De rechte lijnen stellen de parabolische snelheidsverdeling voor en hieruit blijkt dat deze veel beter voldoen. Helaas waren enkele gegevens als afvoer, gemiddelde snelheid, weerstand, zandgehalten niet of slechts ten dele bekend terwijl terugwerken van de eindresultaten, in verband met de geringe diepte van 7-17 cm in de proefgoot, niet zonder gevaar is, zodat van een verdere uitwerking en toetsing moest worden afgezien.

In de vorige paragraaf is gebleken dat er in de lagen nabij de oppervlakte meer zand zweeft dan uit de berekening volgt, dus nabij de oppervlakte is de uitwisselingscoëfficiënt iets groter dan theoretisch volgt. Dit is ook te zien in fig. 22, welke slaat op de experimenten van Vanoni. Ook dit is verklaarbaar. Aangezien



Figuur 22.

Taan de oppervlakte tot 0 nadert (16), verdwijnt ϵ eveneens (10), omdat de correlatie tussen de snelheidsfluctuaties tot 0 nadert. Echter kunnen deze ongecorreleerde fluctuaties materiaal transporteren en zal er aan de oppervlakte nog altijd zand gevonden kunnen worden. Ook de verschillen in valnelheid van korrels met eenzelfde korrelgrootte kunnen aanleiding zijn, zo-

als reeds eerder is opgemerkt, tot een iets groter gehalte aan de oppervlakte. Men komt dus tot de conclusie dat de aanname, dat \bar{t} aan de oppervlakte = 0 niet ^{geheel} juist is. Men moet hier echter geen grote waarde aan hechten omdat de gehalten nabij de oppervlakte van weinig invloed zijn op het totaal.

Voor het bepalen van N_0 moeten nog een tweetal termen bepaald worden, namelijk A en k_1 uit de formules (39) en (40). Dit zal moeten geschieden uit de nauwkeurige analysering van metingen. Toch kunnen uit de ter beschikking staande benadering (figuur 17) en vergelijking met de afgeleide formule (39) en (40), waaruit figuur 6 is gevolgd enige belangwekkende conclusies worden getrokken. Men vindt in figuur 17 dus de bevestiging van het feit dat voor de evenwichtstoestand voor elke waarde van t (dus ook van w_0) een vaststaande waarde van $\frac{N_0}{\Delta F(c)}$ moet bestaan. Vergelijking van figuur 6 en 17 toont aan dat (39) qua vorm voldoet.

Uit metingen zal men dus moeten komen tot een verbeterde figuur 17, later exacte bepaling van A en k_1 .

Is het bodemmateriaal in een rivierbed dus te karakteriseren door een bepaalde valsnelheid c , dan kan dus uit de hydraulische voorwaarden de waarde van t bepaald worden en deze leidt tezamen met $\Delta F(c)$ tot de bepaling van N_0 aan de hand van fig. 17 (verbeterd) en/of (39) welke waarde geldt voor de evenwichtstoestand. Dat er een behoorlijke spreiding te verwachten is bij de analysering van de metingen komt omdat evenwicht niet altijd aanwezig is. Komt nu water met een bepaald gehalte een rivier of -vak in, zodanig dat N_0 groter wordt dan uit de evenwichtstoestand volgt dan zal dit teveel aan zwevend materiaal zich gaan afzetten wanneer t (dus de factor, die de bodemgesteldheid en de hydraulische voorwaarden weergeeft), niet of bijna niet verandert. In het tegenovergestelde geval zal er zolang zand aan de bodem onttrokken worden tot de evenwichtstoestand hersteld is. Er treedt dan uitschuring op. In fig. 17 (of 6) ligt dus links van de lijn die de evenwichtstoestand weergeeft het gebied van uitschuring en rechts van aanzanding. Uit bovenstaande en uit de beide figuren volgt tevens dat grof materiaal (grote waarde van c en dus van t) eerder de evenwichtstoestand zal bereiken dan fijn materiaal.

Neemt de uitwisselingscoëfficiënt af ten gevolge van wijzigingen in H of I dan zal t toenemen en zal er dus een zekere sedimentatie optreden. Het bepalen van deze sedimentatie zou dus aan de hand van een verbeterde figuur 17 kunnen geschieden. Ook in dit geval blijkt de grotere gevoeligheid van grof materiaal voor wijziging in de hydraulische voorwaarden : het effect is relatief groter dan bij fijn materiaal.

Uit de figuren 6 en 17 blijkt ook dat N_0 zeer groot wordt bij zeer kleine waarden van t (of w_0), wat in feite neerkomt op zeer fijn materiaal. Bij slib wil dit zeggen dat e tot 0 nadert, waarbij W_0 tot oneindig nadert ofwel dat de verhouding $\frac{N_0}{\Delta V(c)}$ nadert tot oneindig. Er bestaat dus in dit geval geen exact verband meer tussen het zwevende materiaal en het bodemmateriaal, of anders gezegd: er zou een behoorlijk bedrag aan zwevend slib kunnen zijn zonder een meetbare hoeveelheid in de bodem, waarmede aangetoond is dat het slibtransport niet afhankelijk is van de bodemgesteldheid doch van de slibaanvoer van boven af.

Voor zeer grof materiaal zal t groot worden en dus N_0 klein: bij grof bodemmateriaal zal dus zeer weinig materiaal tot zweving komen.

Beschikt men over een verbeterde figuur 17 dan zal het mogelijk zijn om voor elke korrelgrootte het begin van zweving te bepalen met behulp van (39).

De term A bepaalt de verschuiving van de lijn naar links of naar rechts (zie bladzijde 34), deze tijdsfactor schijnt dus mede de mate van uitschuring of aanzanding te bepalen.

Met het afnemen van de temperatuur nemen de valanelheden af met gevolg dat ook t afneemt en dus N_0 toe gaat nemen. Op grond hiervan zal men dus 's winters meer zand in het water kunnen verwachten dan 's zomers. Ook de aanwezigheid van slib in het water verlaagt de valanelheden omdat een mengsel van slib en water te beschouwen is als een oplossing, waardoor het soortelijk gewicht van het water verhoogd wordt.

Het lijkt gewant om onder de aandacht te brengen dat turbulente ten gevolge van hindernissen in de rivier en buitengewone ruwheid van de bodem, voorzover deze niet of niet geheel tot uitdrukking komen in de snelheidsverticaal, in deze nota buiten beschouwing zijn gebleven. Dit is ook het geval met secundaire stromingen, waarbij vooral gedachtwordt aan bochtwerking.

§ 8. Samenvatting.

Paragraaf 2. Hierin wordt een overzicht gegeven van de theorie van de turbulente stroming en de formule:

$$\tau = \rho \epsilon \frac{dV}{dh} \quad (10).$$

afgeleid.

Paragraaf 3. De evenwichtsvoorwaarde luidt:

$$-\epsilon \frac{dN}{dh} = cN \quad (14).$$

Afgeleid van de parabolische snelheidsverticaal en de formule voor de titwisseling door turbulentie wordt de formule voor de zandgehalteverticaal:

$$\frac{N_z}{N_a} = \left(\frac{(1-z)^{\frac{1}{q}} e^{-(q+1)z}}{(1-a)^{\frac{1}{q}} e^{-(q+1)a}} \right)^{\frac{t}{k}} \quad (28).$$

$$\frac{t}{k} = \frac{c0}{qg/NH}$$

en afgeleid van de logarithmische snelheidsverdeling:

$$\frac{N_z}{N_a} = \left(\frac{1-z}{z} \cdot \frac{a}{1-a} \right)^{\frac{t}{K}} \quad (27).$$

De laatste is in Amerika gebruikelijk, doch voldoet niet zondermeer, omdat de gebruikte logarithmische snelheidsverdeling nabij de bodem vrij sterk afwijkt. De $\frac{dV}{dh}$ van formule (10) dient uit de parabolische snelheidsverdeling bepaald te worden. De Amerikanen hebben getracht de afwijking van hun formule met de werkelijke meetcijfers te verklaren op een andere manier, doch zijn hierin niet bevredigend geslaagd.

Als benadering voor (27) en (28) is afgeleid:

$$\frac{N_{zb}}{N_{ab}} = e^{-6 \frac{t}{K} (z-a)} \quad (32) \text{ en } (33)$$

Deze benadering voldoet vrij wel wanneer men gebruik maakt van de valsnelheden van Hjulsström (die te laag liggen), doch heeft nabij de bodem een grote afwijking, die verder rekenen met deze formule niet toelaat.

In de formules (30) en (34) is de verhouding $\frac{N}{N_0}$ vastgelegd.

Paragraaf 4. Met behulp van de waarschijnlijkheidsrekening wordt een formule afgeleid voor de bepaling van N_0 (39) en (40) :

$$\frac{N_0}{\Delta F(t)} = \frac{A}{\sqrt{\pi}} W_0$$

W_0 is een functie van t en k_1 . De termen k_1 en A zullen nog uit metingen bepaald moeten worden.

Paragraaf 5. Uit de formules voor de zandgehalte- en stroomvertoeaal zijn transportformules afgeleid.

$$M = N_0 V_m H R_{1,2,3}$$

(42) en (43)

Paragraaf 6. Hierin worden de afgeleide formules getoetst aan metingen in de Neder-Rijn en Mississippi en hieruit blijkt, dat (28) en (42) wel voldoen en de in Amerika gebruikelijke formule (27) niet zonder meer. Formule (39) voldoet wel wat vorm betreft.

Paragraaf 7. Hierin wordt besproken waarom (27) niet kan voldoen. Tevens wordt de weerstandsverminderende invloed van de zandbeweging alsmede de wisselwerking tussen de zand- en waterbeweging aangetoond. Ook de grote gevoeligheid voor betrekkelijk geringe wijziging in hydraulische factoren komt ter sprake, wat een nauwkeurige vaststelling van deze factoren noodzakelijk maakt.

Bij de aanwezigheid van slib in het water en bij lage temperaturen is een grotere zandbeweging te verwachten.

Ter vereenvoudiging van het rekenwerk zijn voor de belangrijke formules grafieken bijgevoegd.

's-Gravenhage, 1 December 1948.

De opzichter 2e kl.

Literatuurlijst.

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1. O'brien en Hickox. | Applied fluid mechanics. |
| *) 2. Lane en Kalinske. | Engineering calculations ^s of suspended sediment. 1941 blz. 603. |
| *) 3. Eden. | Relations of suspended to bedmaterials. 1939 blz. 637. |
| ** 4. Kalinske en van Triest. | Application of statistical theory of turbulence to hydraulic problems. blz 416. |
| ** 5. Hunter Rouse. | Experiments on the mechanics of sediment suspension. blz. 550. |
| *) 6. Vanoni. | Some Experiments of the transportation of suspended load. blz. 609, 1941. |
| 7. Dr.Ir.J.van Veen. | Snelheidsverdeling in de verticale. Rapp. en Med. R.W.S. |
| 8. Ir.E.M.H. Schaank en Slotboom. | Enkele mededelingen betreffende de zandbeweging op den Neder-Rijn. De Ing. 1937 nr. 51. |
| 9. Ir.E.M.H. Schaank. | The transportation of sand in rivers. Congres Washington. |
| 10. Ir.L.v. Bendegom. | Enige beschouwingen over riviermorphologie en -verbetering. De Ing. 1947 nr.4. |
| 11. F.Hjulström. | Studies of the morphological activity of rivers as illustrated by the river Fyres. |
| *) 12. A.G. Anderson. | Distribution of suspended sediment in a natural stream. 1947 blz. 678. |
| 13. Th. von Kármán. | Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1930. |

Opm. *) zijn publicaties van de National Research Council, t.w. Transactions of the American Geophys. Union.

**) Proceedings 5th Int. Congress for Applied Mechanics. Londen 1938.

Gebruikte afkortingen.

- a relatieve hoogte boven de bodem
 c velsnelheid zand in stil water
 e grondtal natuurlijke logaritme
 g versnelling van de zwaartekracht
 h hoogte boven de bodem
 k universele constante van von Kármán
 k_1 evenredigheidsfactor
 l' mengweg
 n constante van Manning
 q graad van de snelheidsparabool
 t $\frac{g}{V_{cH}^2}$
 u')
 v') verticale ontbondene van de turbulentiesnelheid
 w' horizontale ontbondene van de turbulentiesnelheid
 z relatieve hoogte boven de bodem $\frac{h}{H}$
 A evenredigheidsfactor
 C constante van Kytelwein
 $\Delta F(e)$ gehalte aan zand van een bepaalde korrelgrootte van het bodemmateriaal
 H hoogte waterspiegel boven de bodem
 I verhang waterspiegel
 M zandtransport per eenheid van breedte en tijd
 N zandgehalte
 V stroomsnelheid water
 ϵ uitwisselingscoëfficiënt
 ρ dichtheid vloeistof $(\frac{SM}{g})$
 τ schuifspanning, sleepkracht per eenheid van breedte

Indices.

- b benaderde waarde
 e, z, a, h, h' hoogte boven de bodem
 m gemiddeld
