

10: 226313

Spiraalstroming

door Ir. L. van Bendegom
(augustus 1943)



Ministerie van Verkeer en Waterstaat
Directoraat Generaal Rijkswaterstaat
Directie Duit Nederland

Bibliotheek

Nr.

SV BOR17 ON



Ministerie van Verkeer en Waterstaat
Directoraat-Generaal Rijkswaterstaat
Directie Oost-Nederland

Postbus 9070
6800 ED Arnhem
Tel. 026 - 3688355

Bibliotheek

naam	afd.	retour	paraaf

S.V.P. TIJDIG VERLENGEN

Spiraalstroming.

RWS Dir. Oost-Nederland

Bibliotheeknr. SV BORDJ ON

Onder spiraalstroming wordt verstaan de schroefvormige voortbeweging van het water in rivierbochten, waarbij de waterdeeltjes nabij den bodem een andere richting van voortbeweging hebben als de waterdeeltjes nabij den waterspiegel. De afwijking van deze richting ten opzichte van den gemiddelden stroombaan is voor eerstgenoemde waterdeeltjes naar den bollen oever, voor laatstgenoemde waterdeeltjes naar den hollen oever. De oorzaak van dit meermalen waargenomen verschijnsel is besproken in een publicatie van Wittmann en Böss. Zeer in het kort komt het hierop neer:

Volgens de potentiaaltheorie zal bij strooming van een ideale vloeistof in bochten dwarsverhang optreden. Dit dwarsverhang zal zoo groot zijn, dat de hierdoor op de waterdeeltjes werkende kracht gelijk is aan de centrifugaalkracht. Aangezien bij deze strooming de watersnelheid in alle punten in één vertikaal dezelfde is zal de centrifugaalkracht ook dezelfde zijn. Dit is niet het geval bij visceuze vloeistof. Hierbij is de watersnelheid nabij den bodem kleiner dan bij den waterspiegel. De centrifugaalkracht is dus evenmin gelijk voor alle punten in een vertikaal. De door het dwarsverhang veroorzaakte kracht is echter wel constant in een vertikaal. Tot nog toe werd aangenomen dat deze laatste kracht evenwicht zou maken met de centrifugaalkracht behoorende bij de middelbare snelheid in de vertikaal. Zooals later zal blijken is dit niet juist; het dwarsverhang zal belangrijk grooter zijn. Aan den waterspiegel zal echter in elk geval de centrifugaalkracht grooter zijn dan de verhangkracht, met andere woorden het waterdeeltje zal naar buiten afwijken. Nabij den bodem is dit omgekeerd. De waterdeeltjes nabij den bodem zullen dus naar den bollen oever afwijken.

Aangezien het voor de bestudeering van verschillende verschijnselen in rivieren van belang is om de beweging van deze spiraalstroming in theoretische formules vast te leggen is dezerzijds getracht om de voor deze beweging geldende differentiaalvergelijkingen op te stellen en uit

Blindstempel C 1016
RWS Dr. Goldblatt

te werken. In het volgende is een overzicht gegeven van de bereikte resultaten.

Bij de berekening van de snelheidsverdeling van het water in een vertikaal wordt voor laminaire strooming uitgegaan van de betrekking, dat de snelheidsgradient $\frac{dv}{dh}$ recht evenredig is met de schuifspanning in het betreffende punt. Hieruit volgt een parabolisch verloop van de snelheid. De as van de parabool valt dan samen met de waterspiegel. Bij turbulente strooming wordt over het algemeen aangenomen, dat de snelheidsgradient evenredig is met de wortel uit de schuifspanning. Het aldus berekende snelheidsverloop blijkt echter in 't geheel niet in overeenstemming te wezen met de meetresultaten, zelfs niet, indien aangenomen wordt, dat de snelheid aan den bodem grooter is dan nul. Daarom wordt wel het begrip mengweg ingevoerd. (zie Prandtl en v. Karman). Aangenomen wordt, dat de snelheidsgradient evenredig is aan de wortel uit de schuifspanning en omgekeerd evenredig aan de mengweg, welke de dimensie [1] heeft. Voor l wordt aangenomen:

$$l = k \frac{\frac{dv}{dh}}{\frac{d^2v}{dx^2}}, \text{ waarin } k = \text{constante.}$$

Voor de snelheidsverdeling in open waterlopen geeft dit echter evenmin een met de metingen overeenstemmende snelheidsverdeling. Dezerzijds is daarom onderzocht welke waarde l zou moeten hebben, omdat een bevredigend resultaat zou worden gevonden. Dit bleek het geval te zijn voor een waarde van l^2 van:

$$l^2 = a \frac{(H-h)h}{H} \cdot h^{2/3} \cdot \xi^{1/3}, \text{ waarin:}$$

H = waterdiepte,

h = hoogte van het betreffende punt boven den bodem,

ξ = maat voor de oneffenheid van den bodem.

Deze laatste term is voor een bepaalde bodemligging als constant te beschouwen.

De formule voor de snelheidsverdeling wordt dus:

$$K = a \left(\frac{dv}{dh}\right)^2 \cdot \frac{(H-h)h}{H} \cdot h^{2/3} \cdot \xi^{1/3}$$

Nu is $K = \rho g (H - h) i_1$, waarin

$i_1 =$ langsverhang.

Dus:

$$\rho g (H - h) i_1 = a \left(\frac{dv}{dh} \right)^2 \frac{(H - h)h}{H} h^{2/3} \epsilon^{1/3}$$

of:

$$\frac{dv}{dh} \sqrt{\frac{\rho g}{a \epsilon^{1/3}} H i_1} h^{5/6}$$

$$v = \frac{6 \sqrt{\rho g}}{a^{1/2} \epsilon^{1/6}} h^{1/6} \sqrt{H i_1} + C.$$

als $h = 0$ is $v = 0$ of

$$v = \frac{6 \sqrt{\rho g}}{a^{1/2} \epsilon^{1/6}} h^{1/6} \sqrt{H i_1}.$$

en

$$v_{h=1} = \frac{6 \sqrt{\rho g}}{a^{1/2} \epsilon^{1/6}} \sqrt{H i_1}$$

dus:

$$v_h = v_1 h^{1/6}$$

en

$$v_{\text{gem}} = \frac{k}{\epsilon^{1/6}} H^{2/3} i_1^{1/2}.$$

Beide formules zijn in goede overeenstemming met de metingen. Bij de berekening van de spiraalstrooming zal daarom gebruik worden gemaakt van de bovenvermelde aanname betreffende den snelheidsgradient.

Op de bijlage is schematisch weergegeven het verloop van de snelheid en van de inwendige krachten en schuifkrachten, welke op een waterdeeltje werken. Als coördinaten zijn aangenomen: de X as langs de gem.stroombaan en de Y as \perp daarop. X is positief in de richting van de snelheid, Y is negatief in de richting van het middelpunt van de stroombaankromme. De holle oever ligt dus onder, de holle oever boven aan de figuur. Bij aanname van poolcoördinaten is de X als nulrichting aangenomen, terwijl de hoeken gerekend worden tegengesteld aan de draaiingsrichting van de wijzers van een uurwerk. De volgende notaties zijn ingevoerd:

$i_1 =$ langsverhang

$i_d =$ dwarsverhang

v = snelheid op hoogte h

v₁ = " " " " 1 m

r = straal v/d stroombaan; deze is constant aangenomen voor de heele vertikaal

ψ = hoek, welke de snelheid maakt met de nulas

φ = hoek, welke de schuifkracht maakt met de nulas

K = schuifkracht

H = waterdiepte

h = hoogte v/e bepaald punt boven den bodem.

Bij de berekening dienen de volgende 4 krachten in aanmerking te worden genomen:

1 kracht t.g.v. het langsverhang

2 " " " dwarsverhang

3 de centrifugaalkracht

4 de kracht van Coriolis.

Bij de berekening van de snelheid is het niet geoorloofd om krachten en snelheidsgradient te ontbinden langs X en Y as, daar de snelheidsgradient evenredig is aan de wortel uit de schuifkracht.

Op een massadeeltje met de eenheid van oppervlakte en hoogte = dh, werken de volgende inwendige krachten.

1. $+\rho g i_1 dh$ langs de X as.

2. $-\rho g i_d dh$ " " Y as.

3. $\left\{ \begin{array}{l} -\rho \frac{v^2}{r} \sin \psi dh \dots\dots\dots " " X as. \\ \vdots \vdots \vdots \\ +\rho \frac{v^2}{r} \cos \psi dh \dots\dots\dots " " Y as. \end{array} \right.$

4. $\left\{ \begin{array}{l} +av \sin \psi dh \dots\dots\dots " " X as. \\ -av \cos \psi dh \dots\dots\dots " " Y as. \end{array} \right.$

De ontbondenen langs X en Y as van de schuifkracht op een hoogte h zijn de volgende:

1. $+\rho g(H - h) i_1$ langs de X as.

2. $-\rho g(H - h) i_d$ " " Y as.

3. $\left\{ \begin{array}{l} \int_h^H -\rho \frac{v^2}{r} \sin \psi dh \dots\dots\dots " " X as. \\ \int_h^H +\rho \frac{v^2}{r} \cos \psi dh \dots\dots\dots " " Y as. \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_h^H + av \sin \varphi dh \dots \dots \dots \text{langs de X as.} \\ \int_h^H - av \cos \varphi dh \dots \dots \dots \text{" " Y as.} \end{array} \right.$$

In totaal zijn er 4 afhankelijkvariabelen, nl.:

v, K, φ en ψ .

Het is mogelijk om vier betrekkingen op te stellen tusschen deze afhankelijkvariabelen en de onafhankelijkvariabele h .

In de eerste plaats geldt de reeds eerder besproken betrekking tusschen K en $\frac{dv'}{dh}$. K is in dit geval de resultante van de verschillende schuifkrachten; $\frac{dv'}{dh}$ is de snelheidsgraadient in de richting van K . Uit de bijlage (fig.2) is te stellen:

$$\frac{dv'}{dh} = \frac{dv}{dh} \frac{1}{\cos(\varphi - \psi)}$$

dus:

$$K = C_1 \left(\frac{dv}{dh}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2(\varphi - \psi)} \cdot \frac{H-h}{H} h^{5/3} \cdot \epsilon^{1/3}$$

of:

$$\frac{dv}{dh} = \sqrt{\frac{KH}{C_1(H-h)}} \cdot \cos(\varphi - \psi) h^{-5/6} \epsilon^{-1/6}$$

(I)

Eventueel zou de eenvoudigere vergelijking $\left(\frac{dv}{dh}\right)^2 = aK$

kunnen worden gebezigd, dus:

(I a)

$$\frac{dv}{dh} = \sqrt{aK} \cdot \cos(\varphi - \psi)$$

Een tweede betrekking is op te stellen voor ψ, φ en v , nl.: (zie fig.2):

$$v \cdot d\psi = dv \cdot \text{tg}(\varphi - \psi)$$

of

(II)

$$\frac{dv}{d\psi} = \frac{v}{\text{tg}(\varphi - \psi)}$$

Tenslotte zijn uit fig.3 een tweetal vergelijkingen op te zetten, nl.:

$$dK = -\rho \cdot g \cdot i_1 \cdot \cos \varphi \cdot dh + \rho \cdot g \cdot i_d \sin \varphi \cdot dh - \left(\frac{\rho v^2}{r} - av\right) \sin(\varphi - \psi) dh \quad \text{en}$$

(III)

$$\text{of: } \frac{dK}{dh} = -\rho g i_1 \cos \varphi + \rho g i_d \sin \varphi - \left(\frac{\rho v^2}{r} - av\right) \sin(\varphi - \psi)$$

en

(IV)

$$\frac{d\varphi}{dh} = \frac{\rho g \cdot i_1 \sin \varphi + \rho g \cdot i_d \cos \varphi - (\rho \frac{v^2}{r} - av) \cos(\varphi - \psi)}{K}$$

Bij deze vier vergelijkingen behooren de randvoorwaarden, dat, indien $h = 0$ ook $v = 0$ en $\varphi = \psi = \varphi_0$ is.

i_1 , H en r zijn verder gegeven. Verder stelt de X de richting van de gemiddelde stroombaan voor. Hieruit volgt, dat $\int_0^H v \sin \varphi = 0$. Uit deze laatste vergelijking is dus i_d op te lossen.

Het is dezerzijds niet gelukt om de 4 diff. vergelijkingen op te lossen. In de 4 vergelijkingen kunnen echter zonder bezwaar eenige vereenvoudigingen worden aangebracht. Uit metingen is nl. gebleken, dat de uiterste waarden van φ , zelfs bij een sterk gekromde rivier zelden de waarden van $+10^\circ$ en -15° overschrijden. De uiterste waarden voor ψ zullen dus omstreeks $+20^\circ$ en -15° bedragen. Dit beteekent, dat we bij niet al te scherpe bochten de waarden $\cos \varphi$, $\cos \psi$ en $\cos(\varphi - \psi)$ gelijk aan 1 mogen stellen en dat we voor de sinus en tangens van deze hoeken de hoeken zelf in radialen mogen nemen.

De 4 vergelijkingen worden dan:

$$(1) \quad \frac{dv}{dh} = \sqrt{\frac{KH}{C_H - h}} \cdot h^{-5/6} \cdot \frac{-1/6}{\epsilon}$$

of:

$$(1a) \quad \frac{dv}{dh} = \sqrt{C_2 K}$$

$$(2) \quad \frac{dv}{d\psi} = \frac{v}{\varphi - \psi}$$

$$(3) \quad \frac{dK}{dh} = \frac{-\rho g \cdot i_1 + \rho g \cdot i_d \cdot \varphi - (\rho \frac{v^2}{r} - a \cdot v) \cdot (\varphi - \psi)}{K}$$

$$(4) \quad \frac{d\varphi}{dh} = \frac{+\rho g \cdot i_1 \varphi + \rho g \cdot i_d - (\rho \frac{v^2}{r} - av)}{K}$$

Ook deze 4 vergelijkingen konden niet tot oplossing worden gebracht. Wel kunnen enkele conclusies worden getrokken. In de eerste plaats moet de dwarsverhangkracht groter zijn dan de centrifugaalkracht, daar φ aan den bodem een negatieve waarde moet hebben. Het dwarsverhang kan hierdoor eenige tientallen procenten groter zijn. In de tweede plaats is de kracht langs de X as

steeds kleiner dan $\rho \cdot g \cdot i_1 \cdot H$ doordat de ontbondene van de centrifugaalkracht langs de X as tegengesteld is aan de langsverhangkracht. In bochten is dus extra weerstand. Indien de term av gelijk en tegengesteld is aan $\frac{v^2}{r}$, dan wordt de kracht van Coriolis door de bocht opgeheven. Daar a voor onze breedte een waarde heeft van omstreeks 0,011 (per massaeneheid van 1 m^3 water), zal dit het geval zijn bij een straal van $r = \frac{\rho v}{a}$. Bij een snelheid van 1 m/sec wordt dit dus: $r = \frac{100^a \times 1}{0,011} = \pm 9000 \text{ m}$. Indien dus een rivier een bocht naar rechts heeft met een straal van 9000 m. zal de kracht van Coriolis door de centrifugaalkracht worden opgeheven. Hieruit blijkt dus wel, dat de invloed van Coriolis niet groot is.

De grootste moeilijkheid voor de oplossing van de diff. vergelijkingen is gelegen in het feit, dat de middelpuntvliedende kracht niet langs de Y as is gericht. Zou men echter aannemen, dat dit wel het geval is, dan zouden belangrijke fouten in de uitkomsten optreden. De centrifugaalkracht voor een deeltje nabij den waterspiegel kan grooter zijn dan de langskracht, de totale centrifugaalkracht in een vertikaal kan wel even groot worden als de langsverhangkracht. De afwijking van eerstgenoemde kracht t.o.v. de Y as kan respectievelijk 10° en 5° bedragen. De ontbondene van de centrifugaalkracht langs de X as kan dus voor de totale kracht omstreeks 10 % bedragen, de hoek φ_0 kan dus een fout van dezelfde orde van grootte geven.

Zou men dit willen accepteren, dan zouden de vergelijkingen aanmerkelijk eenvoudiger worden. De kracht K zou dan bedragen:

$$K = \frac{\rho \cdot g \cdot i_1 \cdot (H - h)}{\cos \varphi}$$

Ingevuld in (I), zou door wegvallen van het quotient $\frac{\cos \varphi}{\cos^2(\varphi - \varphi)}$ de oude vergelijking voor de snelheidsgradient ontstaan. In dat geval zouden we dus krijgen:

$$v = v_1 h^{1/6}$$

en:

$$\text{tg } \varphi = \varphi = \frac{-\rho \cdot g \cdot i_d \cdot (H - h) + \int_h^H \left(\rho \frac{v^2}{r} - av \right) dh}{\rho \cdot g \cdot i_1 \cdot (H - h)}$$

of geïntegreerd:

$$\psi = \frac{-i_d + \frac{3}{4} \frac{v_1^2}{gr} \cdot \frac{H^{4/3} - h^{4/3}}{H - h} - \frac{6}{7} \frac{av_1}{\rho g} \cdot \frac{H^{7/6} - h^{7/6}}{H - h}}{i_1}$$

en

$$\psi_0 = \frac{-i_d + \frac{3}{4} \frac{v_1^2}{gr} H^{4/3} - \frac{6}{7} \frac{av_1}{\rho g} H^{7/6}}{i_1}$$

Nu is volgens (2) $\frac{dv}{d\psi} = \frac{v}{\psi - \psi_0}$

of $d\psi = dv \frac{\psi - \psi_0}{v}$.

Nu is ψ bekend = $f(v)$.

of:

$$d\psi = dv \frac{f(v) - \psi_0}{v}$$

De oplossing hiervan is:

$$\psi = \frac{1}{v} \int f(v) dv + C$$

$$\psi f(v) = - \frac{1}{i_1} + \frac{3}{4} \frac{v_1^2}{gr i_1} \frac{H^{4/3} - \frac{v^8}{v_1^8}}{H - \frac{v^6}{v_1^6}} - \frac{6}{7} \frac{av_1}{\rho g i_1} \frac{H^{7/6} - \frac{v^7}{v_1^7}}{H - \frac{v^6}{v_1^6}}$$

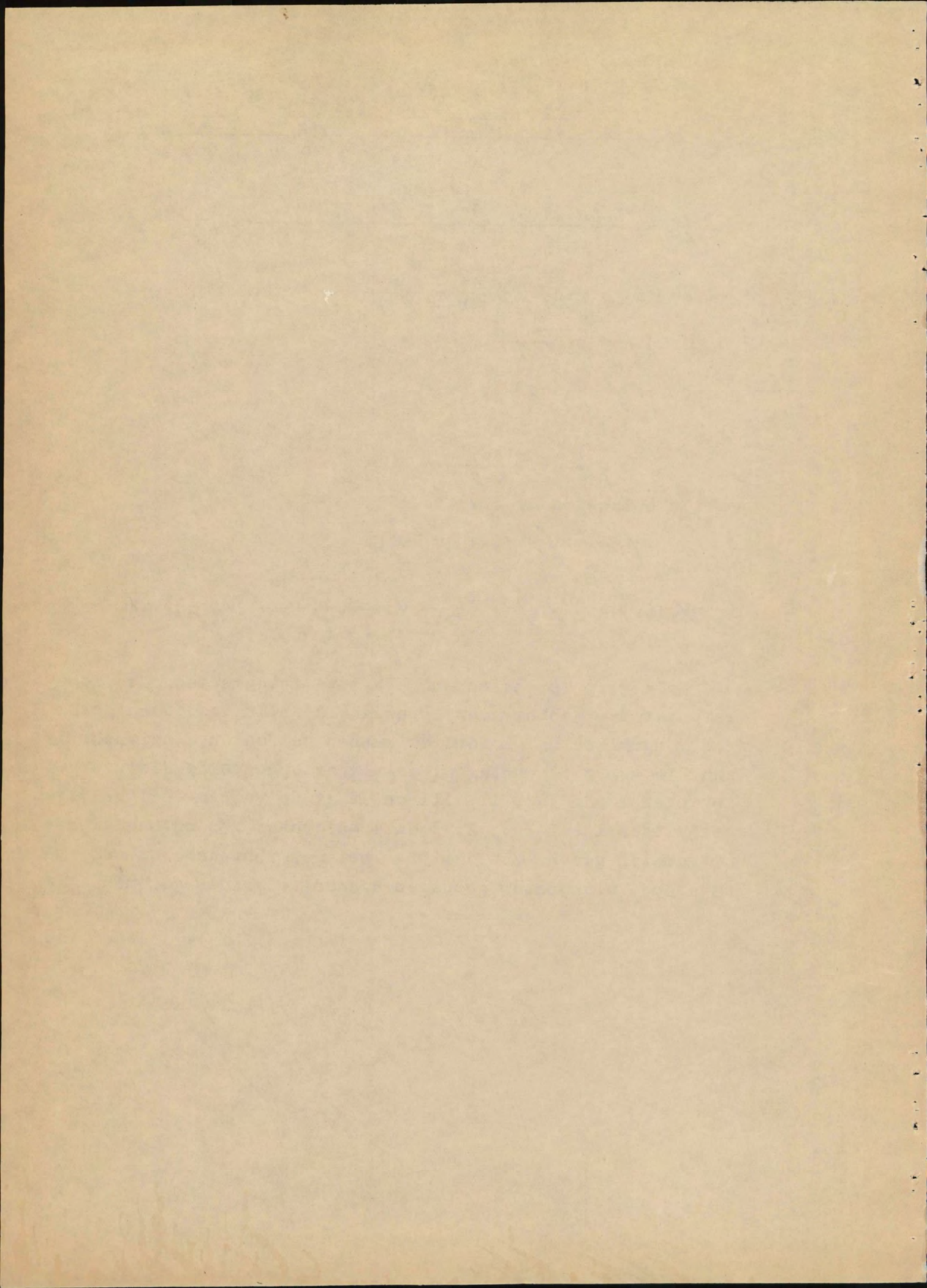
Deze vorm is waarschijnlijk wel te integreren. De formule wordt dan echter zeer ingewikkeld en is voor de praktijk zeer ongemakkelijk. Bovendien kunnen de fouten aanzienlijk zijn. De vraag is echter of de eerder opgestelde diff. vergelijkingen I (of Ia), II, III en IV of de vereenvoudigde vergelijkingen 1 (of la), 2, 3 en 4 oplosbaar zijn en handelbare uitkomsten geven. Zou dit niet het geval zijn, dan zou met benaderende uitkomsten genoeg dienen te worden genomen.

=====
-o-o-o-
-o-
+

Arnhem, Aug 1943

de ingez. em

van der ...



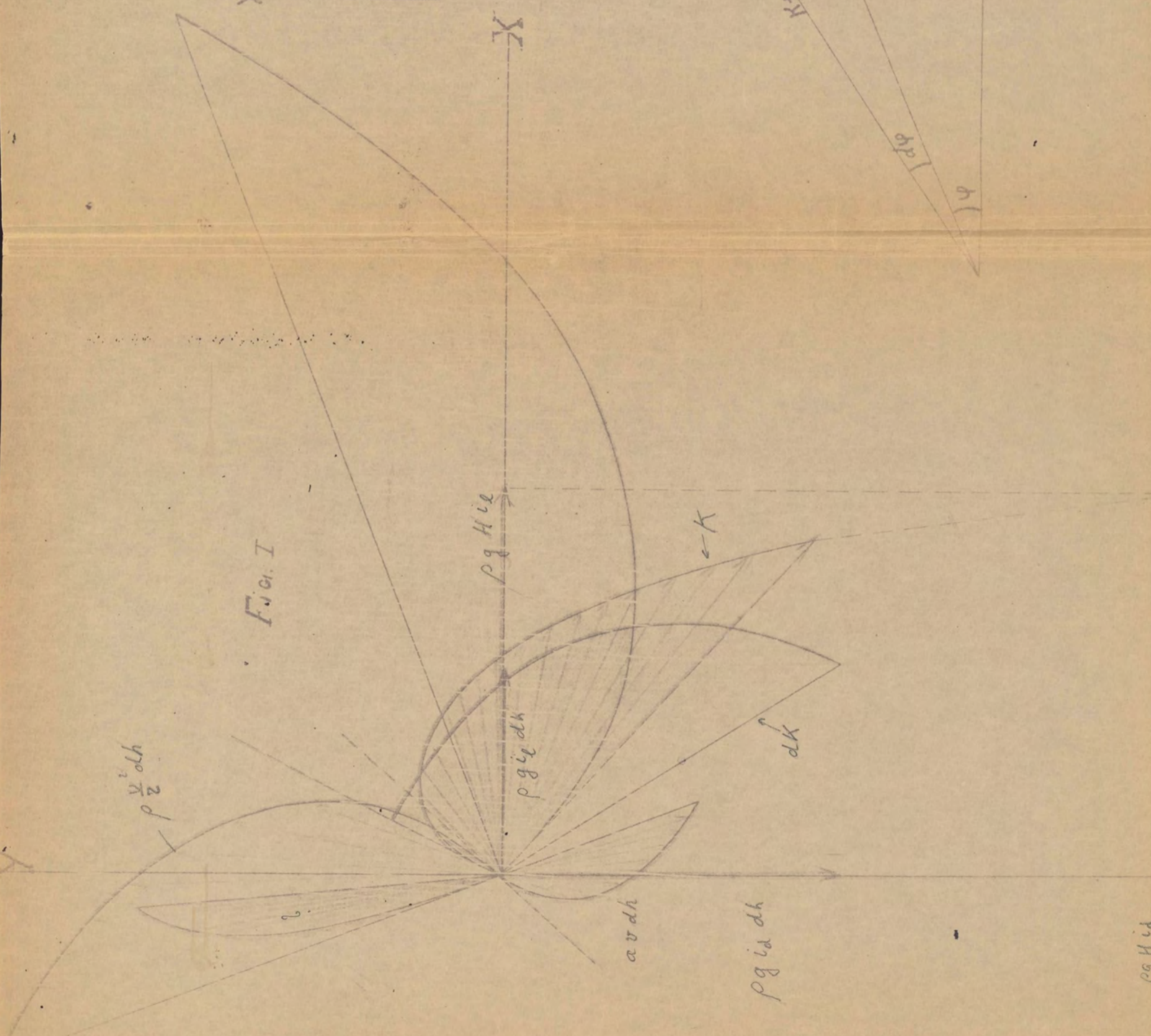


Fig. 1

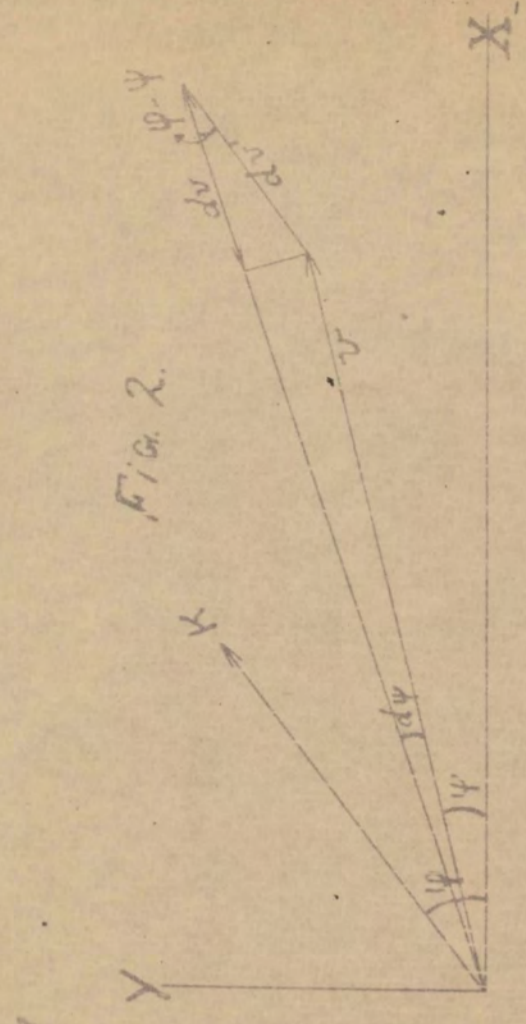


Fig. 2

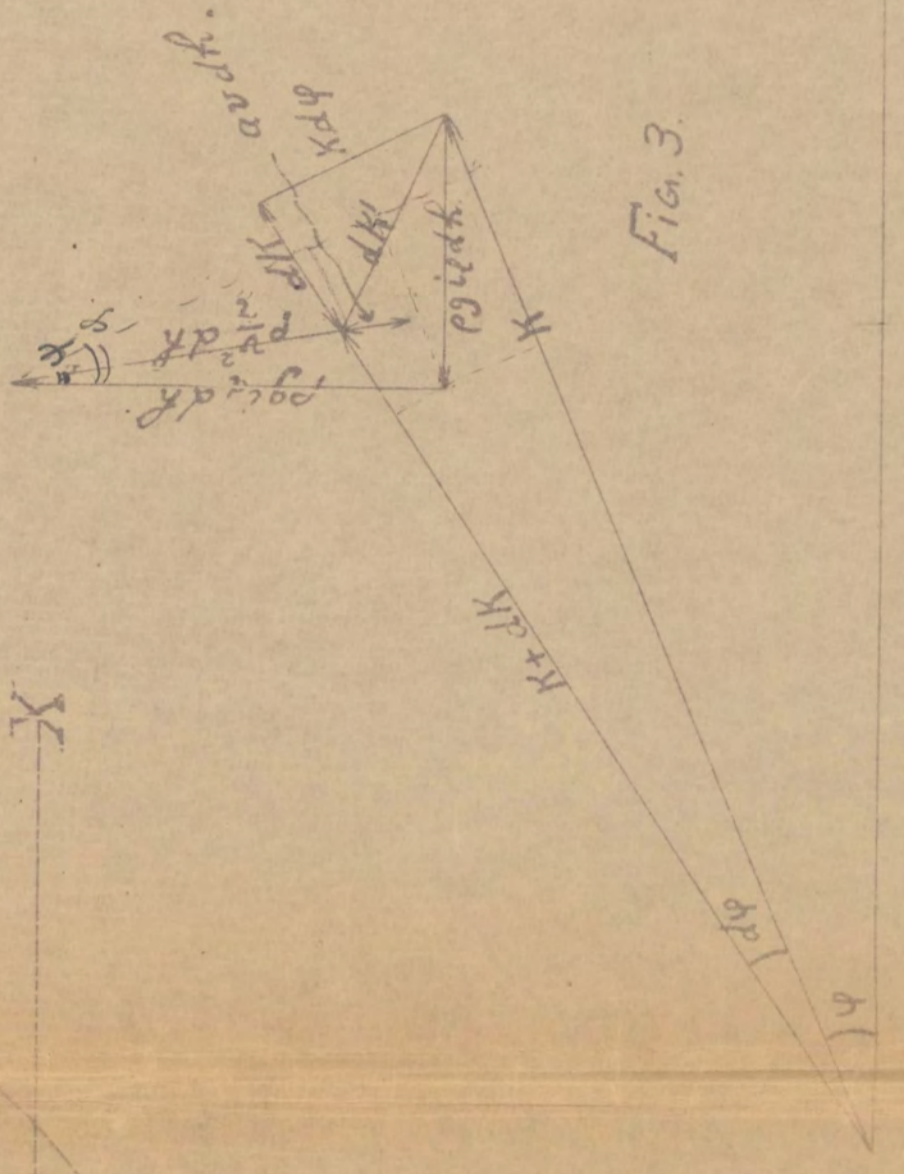
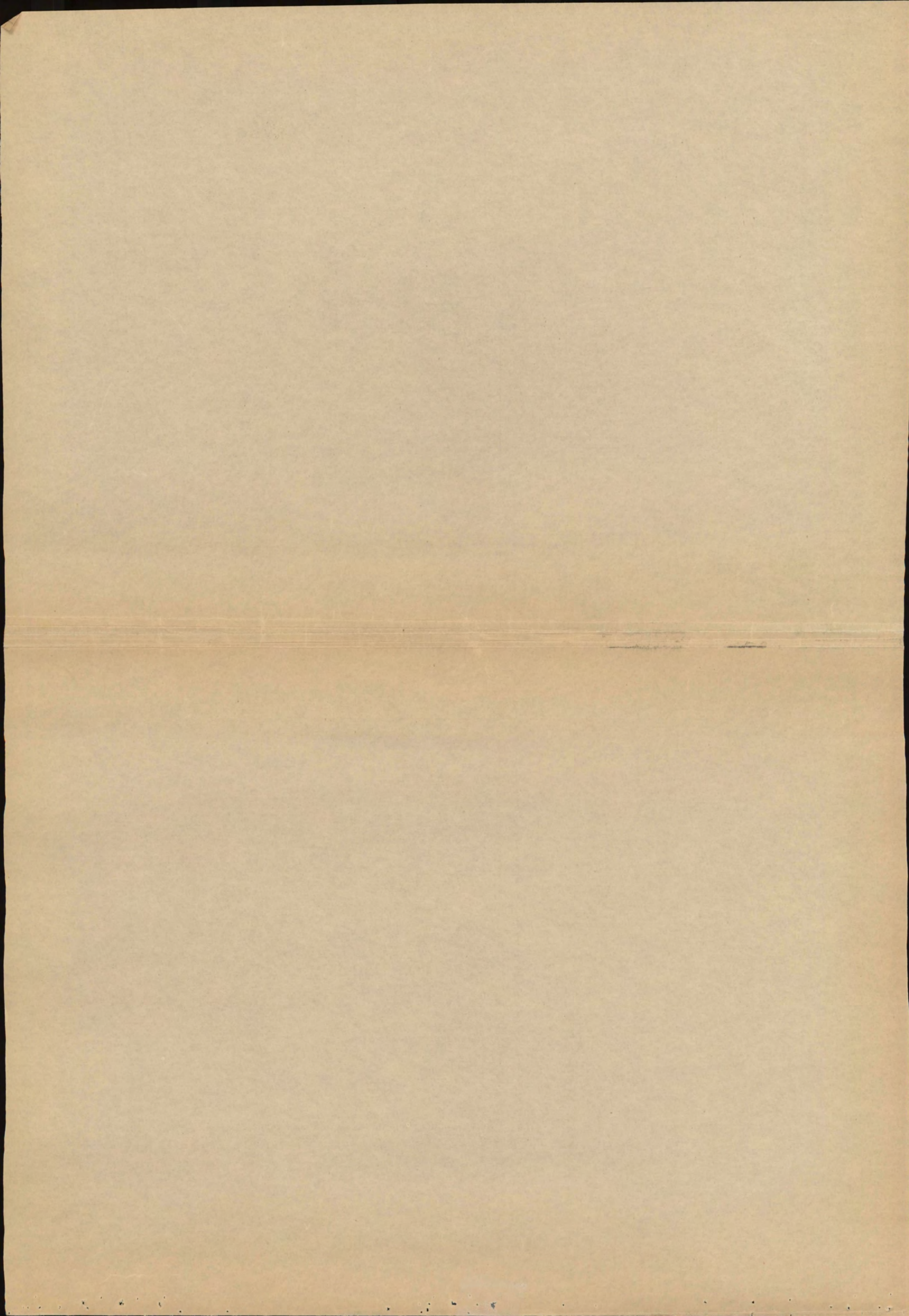


Fig. 3

RIJKSWATERSTAAT	dir. Bovenrivieren afd. Studiedienst	O 1943/39
Spiraalstroaming		276 R. I
Schema van de optredende krachten		Bijlage 1

$\rho g H i e$



No. ===

Brief
Kantschrift van ===

AAN

den Weled. gestr. Heer
ir. J.C. Schönfeld
te DEN HAAG,
Weissenbruchstraat 19.

Betreffende:

Spiraalstrooming.

UJ

Bijlagen: terug: ==
nieuwe:

Geachte Heer Schönfeld,

In antwoord op Uw schrijven van 12 September j.l. wil ik u gaarne eenige nadere gegevens verschaffen omtrent de orde van grootte van de in de vergelijkingen voorkomende grootheden.

Het langsverhang i_l vertoont op de Nederlandsche Rijn takke weinig variatie, de orde van grootte is op 10^{-4} te stellen. Omtrent het dwarsverhang i_d bestaan weinig gegevens; bij sterke krommingen ($R = \pm 500$ m) werden waarden gevonden van $3 \cdot 10^{-4}$ à $5 \cdot 10^{-4}$. In normale bochten heeft het dwarsverhang dezelfde orde van grootte als het langsverhang. Zoolks in de nota wordt gezegd is het dwarsverhang groter (10 à 30%) dan het verhang, dat in evenwicht zou zijn met de centrifugaalkracht. Dit laatste verhang bedraagt $\frac{v^2}{gr}$; bij een normale snelheid van 1 m/sec en een straal van 2000 m zou het dwarsverhang dus een weinig groter dan $0,5 \cdot 10^{-4}$ moeten zijn; bij een snelheid van 2 m/sec en een straal van 500 m zou het dwarsverhang enkele tientallen procenten groter dan $8 \cdot 10^{-4}$ moeten zijn. Dit laatste is echter een uitzonderlijk geval.

De gemiddelde waterdiepte op onze rivieren varieert van 2 - 10 m; in binnenbochten kan deze 0 worden, terwijl in buitenbochten bij zeer H.w. diepten tot 15 à 20 m kunnen voorkomen. Voor de spiraalstroomberekeningen, welke vooral van belang zijn bij middelbare waterstanden, behoeft slechts rekening gehouden te worden met diepten van 2 m (binnenbocht) tot 7 m (buitenbocht).

De gemiddelde snelheid geeft op de bovenrivieren in Nederland variaties van 0.75 tot 1.50 m/sec, dit laatste bij hoogwater. Plaatselijk kunnen snelheden tot 3,10 m/sec optreden; daarentegen kan op het benedendeel der rivieren de gemiddelde

snelheid afnemen tot enkele dm per sec. Met deze uitersten zou evenmin rekening behoeven te worden gehouden.

De straal der bochten varieert van ± 500 m tot oneindig. Gerekend zou bijv. kunnen worden met stralen van 500 en 2000 m.

De grootte van de kracht van Coriolis bedraagt $2\omega \sin \varphi$ waarin ω = hoeksnelheid van de aardrotatie, φ = breedtegraad, of $2\omega \sin \varphi = 0,000116$ voor Nederland. Dit is dus eveneens de kracht per eenheid van snelheid. Dit komt dus overeen met een verhang van $1,15$ cm/km bij een snelheid van 1 m/sec. De coëfficiënt a op blz. 4 van de nota bedraagt dus $\rho \times 0,000116 = 0,0116$, uitgedrukt in het kg-m-sec stelsel.

De op blz. 2 en 3 abusievelijk eveneens a genoemde constante is als volgt te berekenen: Uit de vergelijkingen op blz. 3 volgt, dat:

$$\frac{1}{\epsilon^{1/5}} \cdot H^{2/3} \cdot I^2$$

$v_{\text{gem}} = \frac{36}{7} \sqrt{\frac{\rho g}{a}}$ is dus de coëfficiënt k van Strickler welke op 21 m²/sec wordt gesteld. Hieruit volgt - in het kg-m-sec stelsel - voor a een waarde van $11,6$.

Omtrent de bodemruwheid ϵ bestaan nog weinig gegevens. Tot nog toe werd dezerzijds steeds met de formule van de Chézy gewerkt, waarbij voor c een waarde van omstreeks 48 m²/sec werd gevonden. Deze coëfficiënt bleek bij wijziging ^{1/4} in waterdiepte niet sterk te variëren. Aangezien $c = 21 \left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^{1/6}$, zou hieruit volgen dat ϵ groter wordt bij hogere waterstanden, doordat bijv. de zandribbels groter zouden worden. Dit laatste is inderdaad wel te constateeren. Uit bovenstaande vergelijkingen zou volgen, dat de waarde ϵ zou liggen tusschen 1 en 5 cm bij waterdiepten tusschen 2 en 3 m.

De grootste langssnelheid, waarmee gerekend moet kunnen worden bedraagt $\pm 15\%$ meer dan de grootste gemiddelde snelheid. Hiervoor zou bijv. een waarde van $1,75$ m/sec kunnen worden aangehouden.

In sterke krommingen kan de ontbondene van de snelheid L op de gen. stroomlijn omstreeks 15 à 20% bedragen van de ontbondene langs de gem. stroomlijn. Een waarde van $0,25$ à $0,30$ m/sec zou dus kunnen worden aangehouden.

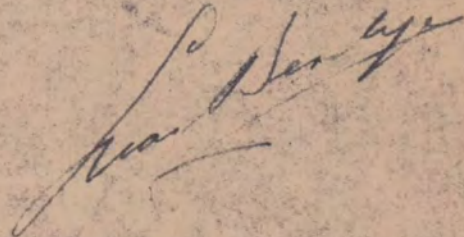
Op het gebied van spiraalstroming zijn nog weinig gegevens beschikbaar. De nauwkeurigheid, waarmee gemeten wordt is globaal als volgt te stellen:

verhangen $\pm 5\%$
diepte 5 cm
snelheden 1 à 2 cm/sec
richtingen 1 à 2 graden.

Dit is echter slechts te verkrijgen, indien op elk punt gedurende langere tijd (bijv. 15 minuten) wordt gemeten.

Hopenlijk zijn bovenstaande gegevens voor U voldoende voor het verkrijgen van een indruk. Gaarne zal ik te zijner tijd Uw beschouwing omtrent het betreffende vraagstuk vernemen.

Hoogachtend,



1. De differentiaalvergelijkingen.

1a. Afleiding.

Hieronder zullen eerst de differentiaalvergelijkingen afgeleid worden in een iets andere notatie, dan in de nota het geval was, teneinde ze beter hanteerbaar te maken voor de daaropvolgende beschouwingen.

De X-as wordt ook weer gekozen in stroomafwaartse richting, de Y-as in de middelpuntvliedende richting en de Z-as in de richting omhoog. De oorsprong wordt gedacht in de bodem van de rivier.

De volgende symbolen werden nu ingevoerd. Tusschen haakjes staat de vertaling in de notatie van de nota:

J	zij het verband, in de X-richting	(11)
-J	„ „ „ „ „ „ Y-richting	(-1d)
Q	de snelheid	(v)
V	snelheidsontbondene in de X-richting	(v cos ψ)
W	„ „ „ „ „ „ Y-richting	(v sin ψ)
K	schuifkracht (weerstand)	(K)
L	schuifkrachtsontbondene in de X-richting	(K cos φ)
M	„ „ „ „ „ „ Y-richting	(K sin φ)
R	straal van de bocht	(r)
S	stroomsterkte per eenheid van breedte	(H)
H	diepte	(h)
Z	hoogte van een punt boven de bodem	(z)
B	constante van de Corioliskracht	(a)
A	coëfficiënt in de formule der snelheidsverd.	(a)
C	maat voor de oneffenheid van de bodem	(c)
ρ	dichtheid van het water	(ρ)
g	versnelling van de zwaartekracht	(g)

De schuifkracht is de kracht, die in een horizontaal vlakje werkt en door het daarboven liggende op het daaronder liggende water wordt uitgeoefend.

De krachten, die werken op een waterdeeltje dx dy dz, zijn dan:

	in de X-richting	in de Y-richting
Verhangkracht	$\rho g J dx dy dz$	$-\rho g J dx dy dz$
Centrifugalekracht	$\frac{dL}{dz} dx dy dz$	$\frac{dM}{dz} dx dy dz$
Tragheidskracht	$-\left(\frac{\rho}{R} V - B\right) W dx dy dz$	$\left(\frac{\rho}{R} V - B\right) V dx dy dz$

De hebben dus twee krachtvergelijkingen:

$$(2-1) \begin{cases} a) \quad \rho g J + \frac{dL}{dz} - \left(\frac{\rho}{R} V - B\right) W = 0 \\ b) \quad -\rho g J + \frac{dM}{dz} + \left(\frac{\rho}{R} V - B\right) V = 0 \end{cases}$$

Wat de middelpuntvliedende krachten niet door $-\frac{\rho}{R} UV$ en $\frac{\rho}{R} UV$, zoals in de nota is aangenomen, maar door $-\frac{\rho}{R} VW$ en $\frac{\rho}{R} V^2$ worden waargegeven, is uit bijgaand schetsje, fig. 1., te zien: R is de straal van de bocht, dθ is de hoek waarover in de tijd dt een waterdeeltje zich vanuit het middelpunt van de bocht gezien verplaatst heeft.

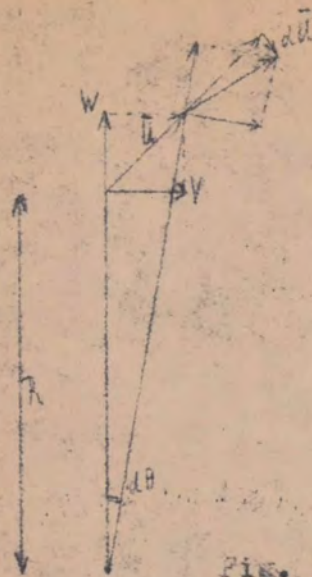


Fig. 1.

Als de radiale en de tangentiële ontbondenen der snelheid \bar{u} gelijk zijn gebleven, dan is de snelheidsverandering $d\bar{u}$ loodrecht op \bar{u} en in grootte gelijk aan:

$$(3-1) \quad |d\bar{u}| = |\bar{u}| d\theta = u d\theta$$

dus:

$$(3-2) \quad (d\bar{u})_{rad} = V d\theta$$

en

$$(3-3) \quad (d\bar{u})_{tang} = -W d\theta$$

nu is:

$$(3-4) \quad d\theta = \frac{V dt}{R}$$

en dus:

$$(3-5) \quad \begin{cases} a) \quad \left(\frac{d\bar{u}}{dt}\right)_{rad} = \frac{V^2}{R} \\ b) \quad \left(\frac{d\bar{u}}{dt}\right)_{tang} = -\frac{VW}{R} \end{cases}$$

Om tot de formules van de nota te komen, zouden we $d\theta = \frac{u dt}{R}$ moeten nemen, wat niet juist is.

Er is verder een weerstandswet en wel de formule van de snelheidsverdeling. Als \bar{u} de vector van de snelheid is en \bar{K} die van de schuifkracht, dan is:

$$(3-6) \quad \bar{K} = A \varepsilon^{1/3} \frac{d\bar{u}}{dz} \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right| \frac{H-z}{H} z^{5/3}$$

ofwel:

$$(3-7) \quad \begin{cases} a) \quad L = A \varepsilon^{1/3} \frac{dV}{dz} \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right| \frac{H-z}{H} z^{5/3} \\ b) \quad M = A \varepsilon^{1/3} \frac{dW}{dz} \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right| \frac{H-z}{H} z^{5/3} \end{cases}$$

Nu zijn de ontbondenen van $\frac{d\bar{u}}{dz}$: $\frac{dV}{dz}$ en $\frac{dW}{dz}$ en dus is:

$$(3-8) \quad \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right|^2 = \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dz} \right)^2$$

quadrateeren en optellen van beide vergelijkingen levert dan, na de wortel te hebben getrokken:

$$(3-9) \quad K = A \varepsilon^{1/3} \left\{ \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 \right\} \frac{H-z}{H} z^{5/3}$$

en deelen der vergelijkingen levert:

$$(4-1) \quad L \frac{dW}{dz} = M \frac{dV}{dz}$$

Het stelsel vergelijkingen, dat de spiraalstrooming beheerscht, is dus:

$$(4-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \frac{dL}{dz} = -\rho g \gamma + \left(\frac{\rho}{R} V - B\right) W \\ \text{b) } \frac{dM}{dz} = \rho g \gamma - \left(\frac{\rho}{R} V - B\right) V \\ \text{c) } K = A \epsilon^{1/3} \left\{ \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 \right\}^{1/2} \frac{H-z}{H} z^{5/3} \\ \text{d) } L \frac{dW}{dz} = M \frac{dV}{dz} \\ \text{e) } K^2 = L^2 + M^2 \\ \text{f) } U^2 = V^2 + W^2 \end{array} \right.$$

met de randvoorwaarden:

$$(4-3) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \text{a) } & \text{Voor } & Z = 0 & \text{is } & V = 0 \\ \text{b) } & \text{"} & \text{"} & \text{"} & W = 0 \\ \text{c) } & \text{"} & Z = H & \text{"} & L = 0 \\ \text{d) } & \text{"} & \text{"} & \text{"} & M = 0 \end{array} \right.$$

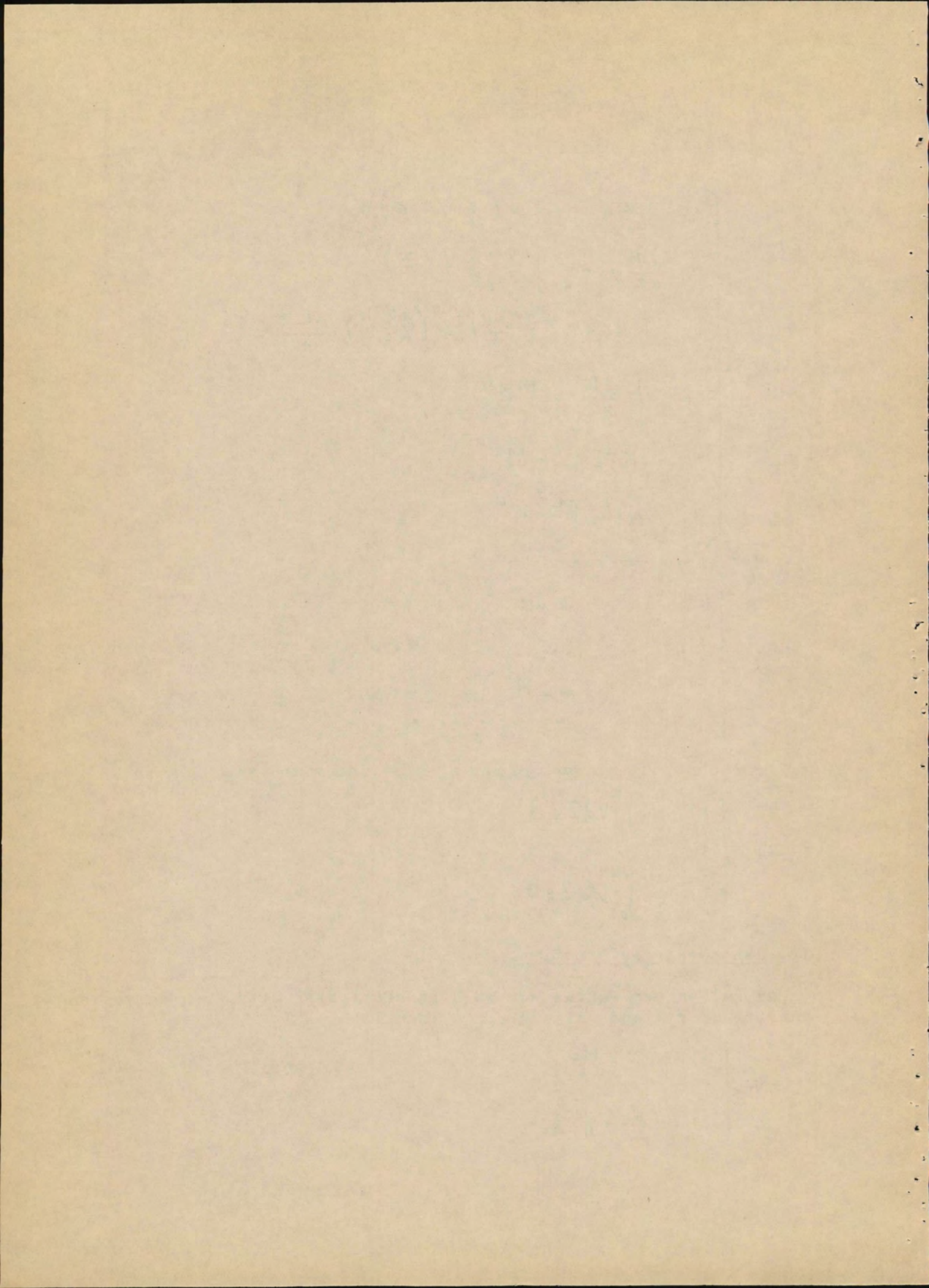
en twee continuïteitsvergelijkingen ter bepaling van γ en γ' :

$$(4-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \int_0^H V dz = S \\ \text{b) } \int_0^H W dz = 0 \end{array} \right.$$

1b. Eenhedentransformaties.

We zullen een aantal eenhedentransformaties uitvoeren en voeren daartoe de volgende nieuwe grootheden in:

$$(4-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } Z = Hz \\ \text{b) } \frac{d}{dz} = \frac{1}{H} \frac{d}{dz} \end{array} \right.$$



$$(5-1) \begin{cases} a) & K = A \sqrt{\frac{\epsilon}{H}} \left(\frac{S}{H}\right)^2 k \\ b) & L = A \sqrt{\frac{\epsilon}{H}} \left(\frac{S}{H}\right)^2 l \\ c) & M = A \sqrt{\frac{\epsilon}{H}} \left(\frac{S}{H}\right)^2 m \end{cases}$$

$$(5-2) \begin{cases} a) & U = \frac{S}{H} u \\ b) & V = \frac{S}{H} v \\ c) & W = \frac{S}{H} w \end{cases}$$

$$(5-3) \begin{cases} a) & \alpha = \frac{\rho H}{RA} \sqrt{\frac{H}{\epsilon}} \\ b) & \beta = \frac{B H}{A} \left(\frac{H}{S}\right) \sqrt{\frac{H}{\epsilon}} \end{cases}$$

$$(5-4) \begin{cases} a) & \gamma = \frac{A}{\rho g H} \left(\frac{S}{H}\right)^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{H}} i \\ b) & \gamma = \frac{A}{\rho g H} \left(\frac{S}{H}\right)^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{H}} j \end{cases}$$

Ten slotte voeren we nog een hulparameter p in:

$$(5-5) \begin{cases} a) & p = z^{1/6} & z = p^6 \\ b) & dp = \frac{1}{6} z^{-5/6} dz = \frac{1}{6} p^{-5} dz & dz = 6p^5 dp = 6z^{5/6} dp \\ c) & \frac{d}{dp} = 6z^{5/6} \frac{d}{dz} = 6p^5 \frac{d}{dz} & \frac{d}{dz} = \frac{1}{6} p^{-5} \frac{d}{dp} = \frac{1}{6} z^{-5/6} \frac{d}{dp} \end{cases}$$

De randvoorwaarden werden:

$$(5-6) \begin{cases} a) & \text{Voor } z = p = 0 \text{ is } V = 0 \\ b) & \text{,, } \text{,, } \text{,, } W = 0 \\ c) & \text{,, } z = p = 1 \text{ ,, } L = 0 \\ d) & \text{,, } \text{,, } \text{,, } m = 0 \end{cases}$$

De continuïteitsvergelijkingen worden:

$$(6-1) \begin{cases} a) \int_0^1 v dz = 1 \\ b) \int_0^1 w dz = 0 \end{cases}$$

Voor de differentiaalvergelijkingen kunnen we nu schrijven:

$$(6-2) \begin{cases} a) \frac{dl}{dz} = -i + (av - b)w \\ b) \frac{dm}{dz} = j - (av - b)v \\ c) k = \left\{ \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \right\} (1-z)z^{5/3} \\ d) l \frac{dw}{dz} = m \frac{dv}{dz} \\ e) k^2 = l^2 + m^2 \\ f) u^2 = v^2 + w^2 \end{cases}$$

Ofwel:

$$(6-3) \begin{cases} a) \frac{dl}{dz} = -i + (av - b)w \\ b) \frac{dm}{dz} = j - (av - b)v \\ c) l = \left| \left\{ \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \right\}^{1/2} \right| \frac{dw}{dz} (1-z)z^{5/3} \\ d) m = \left| \left\{ \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \right\}^{1/2} \right| \frac{dv}{dz} (1-z)z^{5/3} \end{cases}$$

Verwaarlozen we w^2 tov u^2 en m^2 tov k^2 , dan kunnen we ook schrijven:

$$(6-4) \begin{cases} a) \frac{dl}{dz} = -i + (av - b)w \\ b) \frac{dm}{dz} = j - (av - b)v \\ c) l = \left| \frac{dv}{dz} \right| \frac{dw}{dz} (1-z)z^{5/3} \\ d) m = \left| \frac{dv}{dz} \right| \frac{dv}{dz} (1-z)z^{5/3} \end{cases}$$

en als l en v steeds positief zijn, is bij benadering $k=l$ en $u=v$ en dus:

$$(7-1) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \frac{dk}{dz} = -i + (au-b)w \\ \text{b) } \frac{du}{dz} = j - (au-b)u \\ \text{c) } k = \left(\frac{du}{dz}\right)^2 (1-z)^{5/6} \\ \text{d) } k \frac{dw}{dz} = m \frac{du}{dz} \end{array} \right.$$

1c. Naders exacte beschouwingen.

Benoevendigheidshalve zullen we het stelsel (7-1) beschouwen. Dit is een stelsel van vier nietlineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde met vier afhankelijk veranderlijken (k, m, u en w) en één onafhankelijk veranderlijke z . Het is duidelijk, dat een dergelijk stelsel ook vier randvoorwaarden vraagt en deze zijn gegeven in (5-6).

Het is mogelijk dit stelsel te herleiden tot één enkele nietlineaire differentiaalvergelijking van de vierde orde met één afhankelijk veranderlijke, bijv. u .

Dit kan aldus: (accenten geven differentiaties naar z aan):
Uit (7-1d) volgt:

$$(7-2) \quad m = \frac{k}{u} w'$$

nu is volgens (7-1a):

$$(7-3) \quad w = \frac{k'+i}{au-b}$$

dus:

$$(7-4) \quad w' = \frac{k''}{au-b} - au' \frac{k'+i}{(au-b)^2}$$

en:

$$(7-5) \quad m = \frac{k''(k/u)}{au-b} - a \frac{k k' + k i}{(au-b)^2}$$

Door deze formule te differentiëren en de waarde van m' in (7-1b) in te vullen, ontstaat de volgende vergelijking:

$$(7-6) \quad au^2 - bu - j + \frac{k'''(k/u) + k''(k/u)'}{au-b} - a \frac{ik' + 2kk'' + k'^2}{(au-b)^2} + 2a^2 \frac{kk'u' + iku'}{(au-b)^3} = 0$$

Hierin is dan volgens (7-1c) in te vullen:

$$(8-1) \quad k = u'^2 (z^{5/3} - z^{8/3})$$

$$(8-2) \quad k' = 2u'u''(z^{5/3} - z^{8/3}) + \frac{1}{3}u'^2(5z^{2/3} - 8z^{5/3})$$

$$(8-3) \quad k'' = 2(u''^2 + u'u''')(z^{5/3} - z^{8/3}) + \frac{4}{3}u'u''(5z^{2/3} - 8z^{5/3}) \\ + \frac{10}{9}u'^2(z^{-1/3} - 4z^{2/3})$$

$$(8-4) \quad k''' = 2(3uu''u''' + u'u'''')(z^{5/3} - z^{8/3}) + 2(u''^2 + u'u''')(5z^{2/3} - 8z^{5/3}) \\ + \frac{20}{3}u'u''(z^{-1/3} - 4z^{2/3}) + \frac{10}{27}u'^2(-z^{-4/3} - 8z^{-1/3})$$

$$(8-5) \quad k/u' = u'(z^{5/3} - z^{8/3})$$

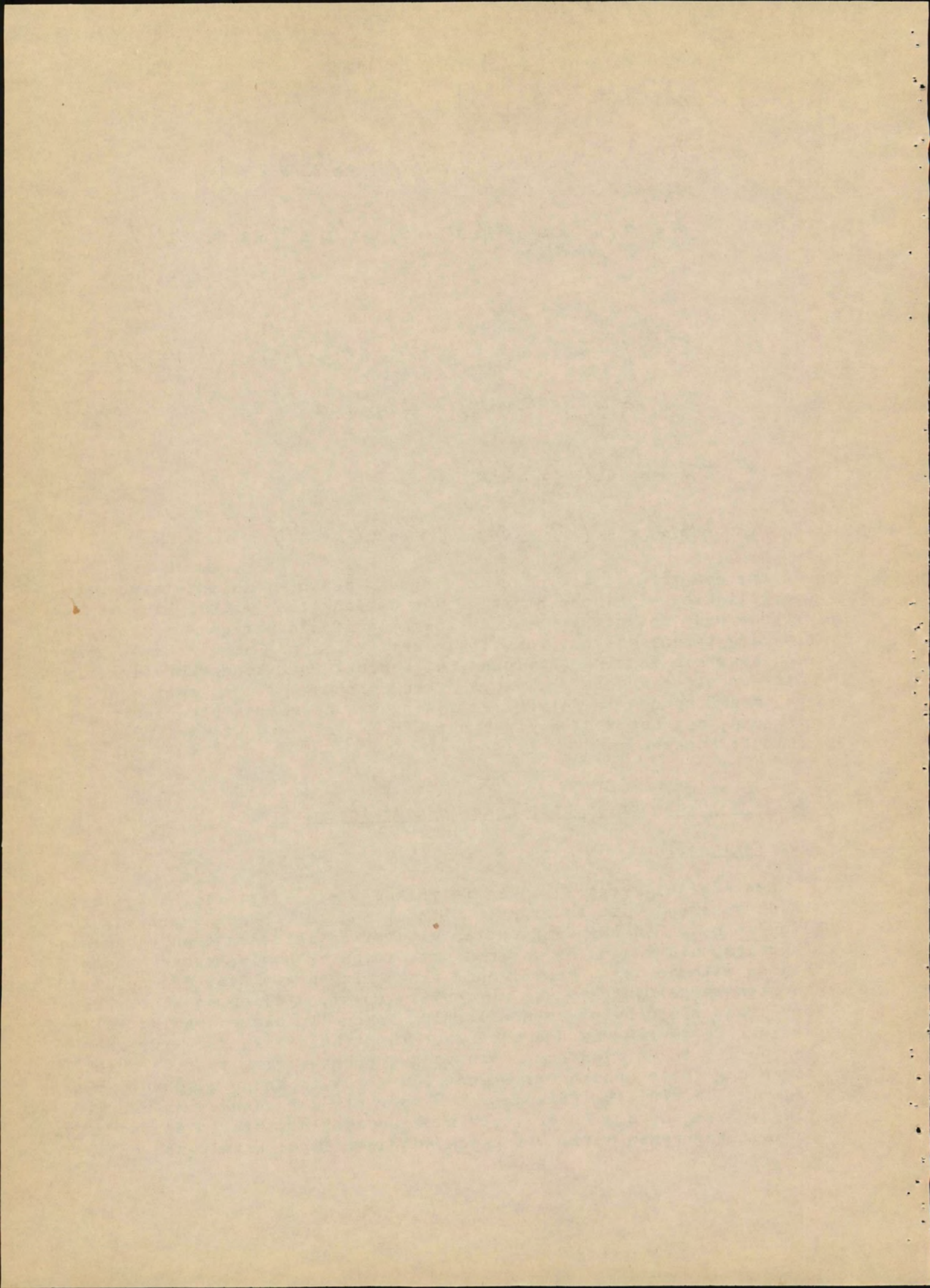
$$(8-6) \quad (k/u')' = u''(z^{5/3} - z^{8/3}) + \frac{1}{3}u'(5z^{2/3} - 8z^{5/3})$$

waarna een vergelijking van de vierde orde in u is ontstaan. Deze vergelijking wijkt zoo sterk af van de lineaire vergelijking van de vierde orde met constante coëfficiënten of één der andere vlot oplosbare typen, dat het gerust als onmogelijk mag worden beschouwd een exacte oplossing te vinden, uitgedrukt in bekende functies. Er zit dus niets anders op, dan een benaderende oplossingsmethode toe te passen en dan is deze vergelijking van de vierde orde zoo ingewikkeld, dat het veel aantrekkelijker is met het stelsel (7-1) zelf te werken.

2. De methode der opeenvolgende benaderingen.

2a. Beginnel.

Een stelsel vergelijkingen is volkomen opgelost, als het gelukt is de onbekende uit te drukken uitsluitend in bekende functies. Indien we nu de onbekende functies uitdrukken in bekende en onbekende functies, dan zouden we dat een onvolkomen oplossing kunnen noemen. Bij de methode der opeenvolgende benaderingen stellen, die op alle soorten vergelijkingen kan worden toegepast, stellen we voor elke onbekende zoo'n onvolkomen oplossing samen. In die oplossing vullen we voor de daarin staande onbekende functies een reeds verkregen benadering in en vinden zoo een volgende benadering voor de onvolkomen opgeloste onbekende. De methode wordt in opeenvolgende periodes afgewikkeld. In elke periode wordt voor elk der onbekenden een benadering verkregen, die beter is, dan de benadering, die in de voorafgaande periode verkregen werd. Dat geschiedt door in de onvolkomen oplossingen



der verschillende onbekenden voor de daarin staande onbekenden, die niet opgelost zijn, de benadering der voorafgaande periode in te vullen.

We beginnen de kringloop van perioden met een nulde periode, waarin op een of andere min of meer willekeurige wijze een benadering voor elk der onbekenden gevonden wordt en we eindigen die kringloop, zoodra we mogen verwachten, dat volgende perioden geen noemenswaardige wijzigingen meer zullen brengen in de onbekende. Om dit na te gaan, kunnen we de kringloop karakteriseren door een reeks, waarvan elke periode een term toevoegt, en de convergentie van die reeks bestudeeren. We kunnen ook, minder exact, een raming maken van de fout, die we maken door na een bepaalde periode af te breken, wanneer we ramen hoe groot de correctie ongeveer is, die de eerste niet meer uitgevoerde periode zou aanbrengen.

Zie verder bijv. schriftopgave (op blz.36) nr. 3.

2b. Toepassing.

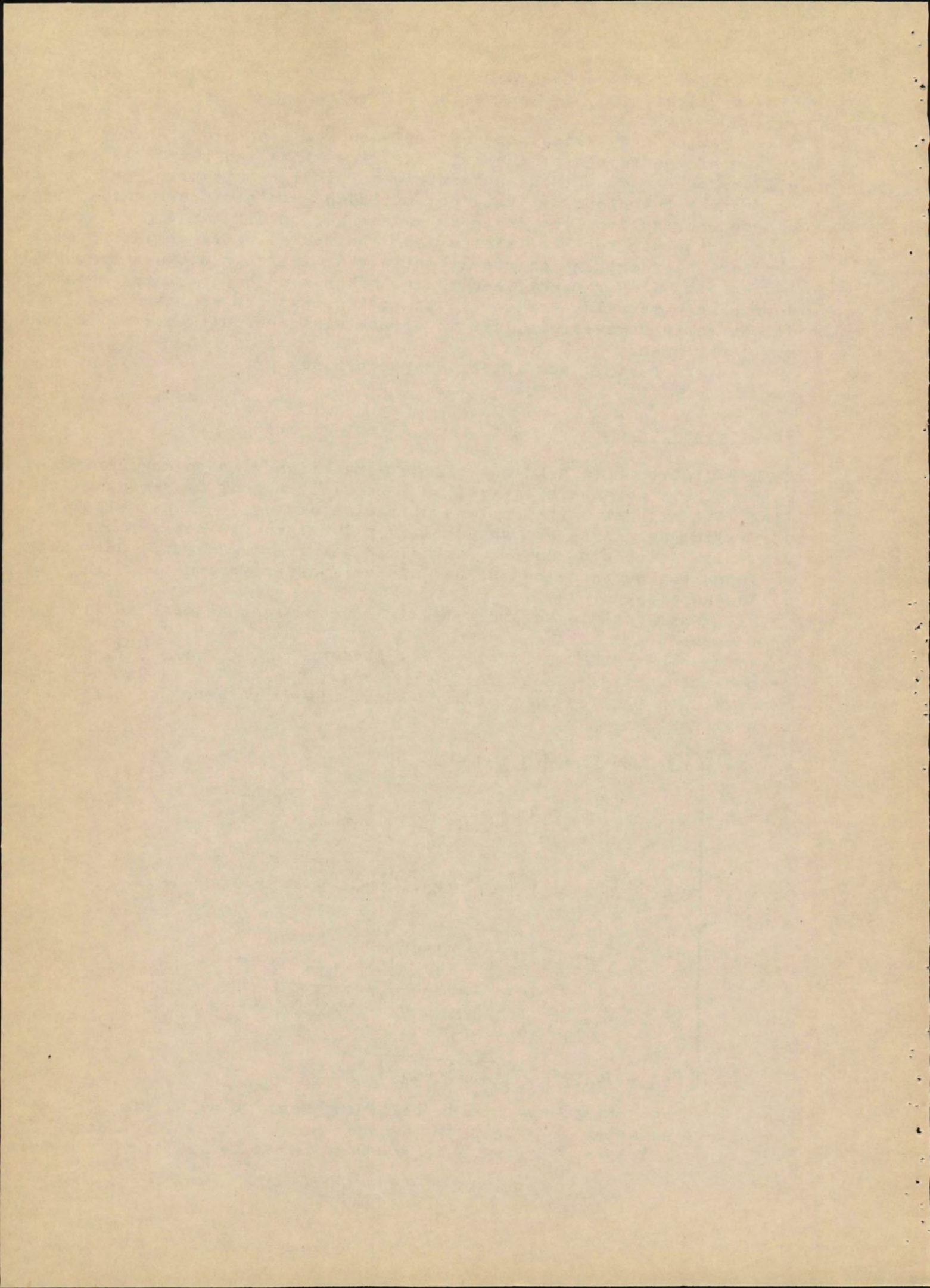
Het ligt voor de hand ons bij het opstellen van een benaderingsmethode, als boven aangegeven, te laten leiden door de veronderstelling, dat bij het optreden vane spiraalstrooming de langzaamheidsverdeling wel in hoofdzaak dezelfde zal blijven en het verschijnsel der spiraalstrooming dus hoofdzakelijk gekarakteriseerd is door het optreden van dwarsnelheden. De juistheid dezer veronderstelling zal al doende blijken!

Uitgaande van die veronderstelling kunnen we nu de methode aldus op bouwen:

We beschouwen het stelsel (6-2). Laten nu u_n, v_n, w_n, k_n, l_n enz. de n-de benaderingen zijn van u, v enz., dan zullen we de (n+1)-de benaderingen u_{n+1}, v_{n+1} enz. berekenen uit de volgende onvolkomen oplossingen:

$$(9-1) \left\{ \begin{array}{l} a) \quad m_{n+1} = \int_1^2 \{ f - (av_n - b)v_n \} dz \\ b) \quad w_{n+1} = \int_0^2 \left\{ m_{n+1} \frac{v_n'}{l_n} \right\} dz \\ c) \quad l_{n+1} = \int_1^2 \{ i + (av_n - b)w_{n+1} \} dz \\ d) \quad k_{n+1} = + \sqrt{l_{n+1}^2 + m_{n+1}^2} \\ e) \quad v_{n+1} = \int_0^2 \sqrt{\frac{k_{n+1}}{1-z} z^{-5/3} - w_{n+1}'^2} dz \\ f) \quad u_{n+1} = + \sqrt{v_{n+1}^2 + w_{n+1}^2} \end{array} \right.$$

De nulde benadering, waarmee we beginnen, bestaat nu de rin, dat we de oplossing nemen voor het geval zonder spiraalstrooming. Deze kunnen we afleiden door in (9-1) $w = 0$ en $m = 0$ te stellen. We hebben



dan:

$$(10-1) \quad k_0' = -\bar{c}$$

en

$$(10-2) \quad k_0 = u_0'^2 (1-z) z^{5/3}$$

We vinden, de randvoorwaarden in aanmerking nemende:

$$(10-3) \quad k_0 = i(1-z)$$

en

$$(10-4) \quad u_0 = b i^{1/2} p = b i^{1/2} z^{1/6}$$

en dus; als we stellen:

$$(10-5) \quad \bar{F}_0 = 1-p^6$$

$$(10-6) \quad \bar{G}_0 = 6p$$

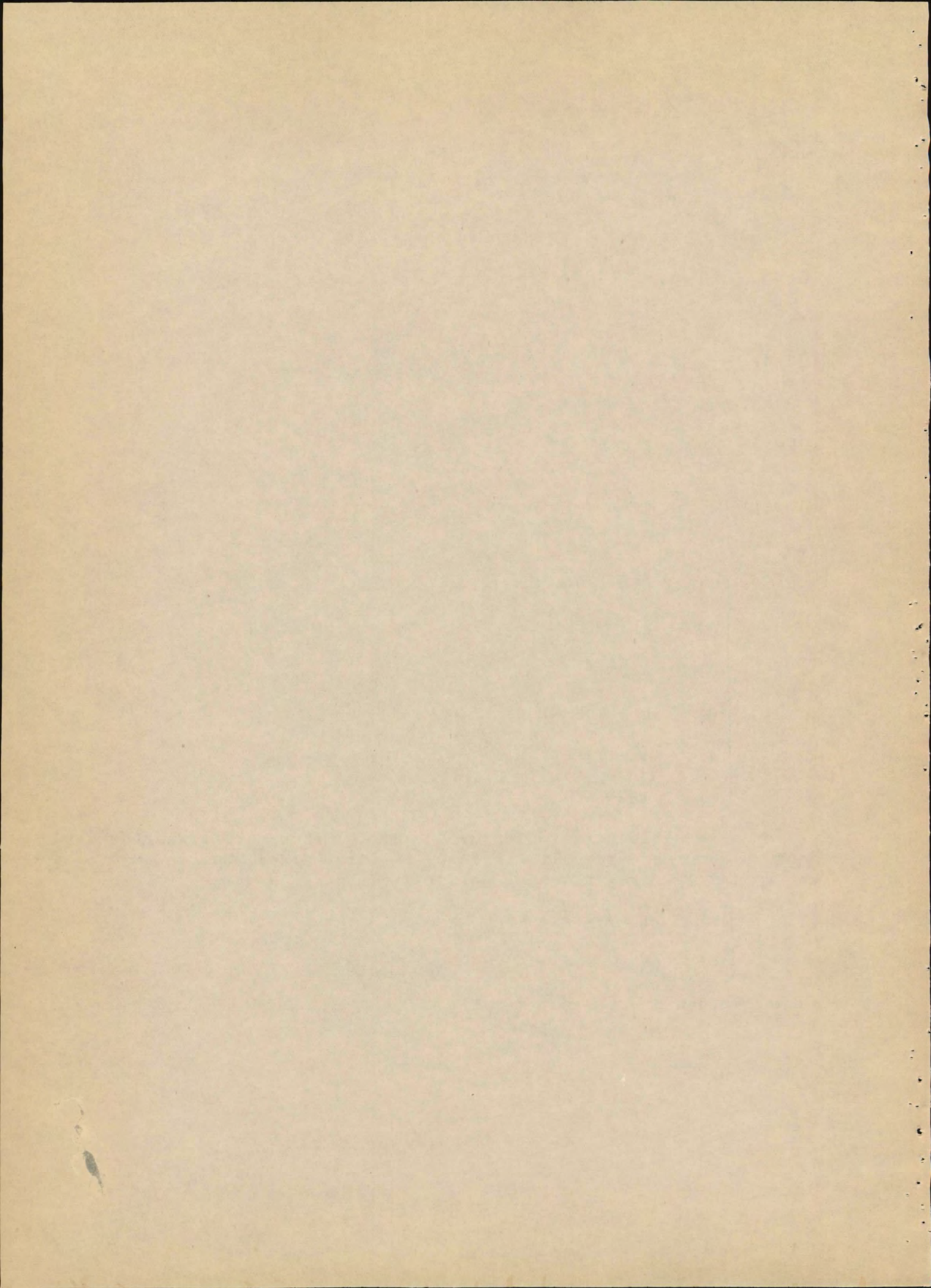
dan is:

$$(10-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad k_0 = i(1-z) = i \bar{F}_0 \\ b) \quad l_0 = i(1-z) = i \bar{F}_0 \\ c) \quad m_0 = 0 \\ d) \quad u_0 = b i^{1/2} z^{1/6} = i^{1/2} \bar{G}_0 \\ e) \quad v_0 = b i^{1/2} z^{1/6} = i^{1/2} \bar{G}_0 \\ f) \quad w_0 = 0 \end{array} \right.$$

Met deze uitkomsten werken we de eerste periode uit. Daartoe vereenvoudigen we de vergelijkingen (9-1) eerst aldus; dat we m_1^2 tov l_1^2 en w_1^2 tov v_1^2 verwaarlozen. Verder stellen we:

$$(10-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad k_1 = l_1 = k_0 + \Delta k_1 \\ b) \quad u_1 = v_1 = u_0 + \Delta u_1 \end{array} \right.$$

en hebben dan de volgende vergelijkingen:



$$(11-1) \begin{cases} a) & m_1 = \int_1^2 \{ j - (au_0 - b) u_0 \} dz \\ b) & w_1 = \int_0^2 \left\{ \frac{m_1 u_0'}{k_0} \right\} dz \\ c) & \Delta k_1 = \int_1^2 (au_0 - b) w_1 dz \\ d) & \Delta u_1 = \int_0^2 \frac{1}{2} \frac{\Delta k_1 i^{\frac{1}{2}} z^{-5/6}}{1-z} dz \end{cases}$$

of uitgewerkt en na overgang van z op p :

$$(11-2) \begin{cases} a) & m_1 = \int_1^p \{ -216 a i p^7 + 36 b i^{\frac{1}{2}} p^6 + 6 j p^5 \} dp \\ b) & w_1 = \int_0^p \frac{m_1 i^{\frac{1}{2}} dp}{1-p^6} \\ c) & \Delta k_1 = \int_1^p (36 a i^{\frac{1}{2}} p^6 - 6 b p^5) w_1 dp \\ d) & \Delta u_1 = \int_0^p \frac{3 \Delta k_1 i^{\frac{1}{2}} dp}{1-p^6} \end{cases}$$

We lossen nu eerst m_1 op:

$$(11-3) \quad m_1 = ai \{ 27(1-p^8) \} + b i^{\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{36}{7} (1-p^7) \right\} + j \{ -(1-p^6) \}$$

of, als we stellen:

$$(11-4) \begin{cases} a) & D_1 = 27(1-p^8) \\ b) & D_2 = -\frac{36}{7}(1-p^7) \end{cases}$$

is:

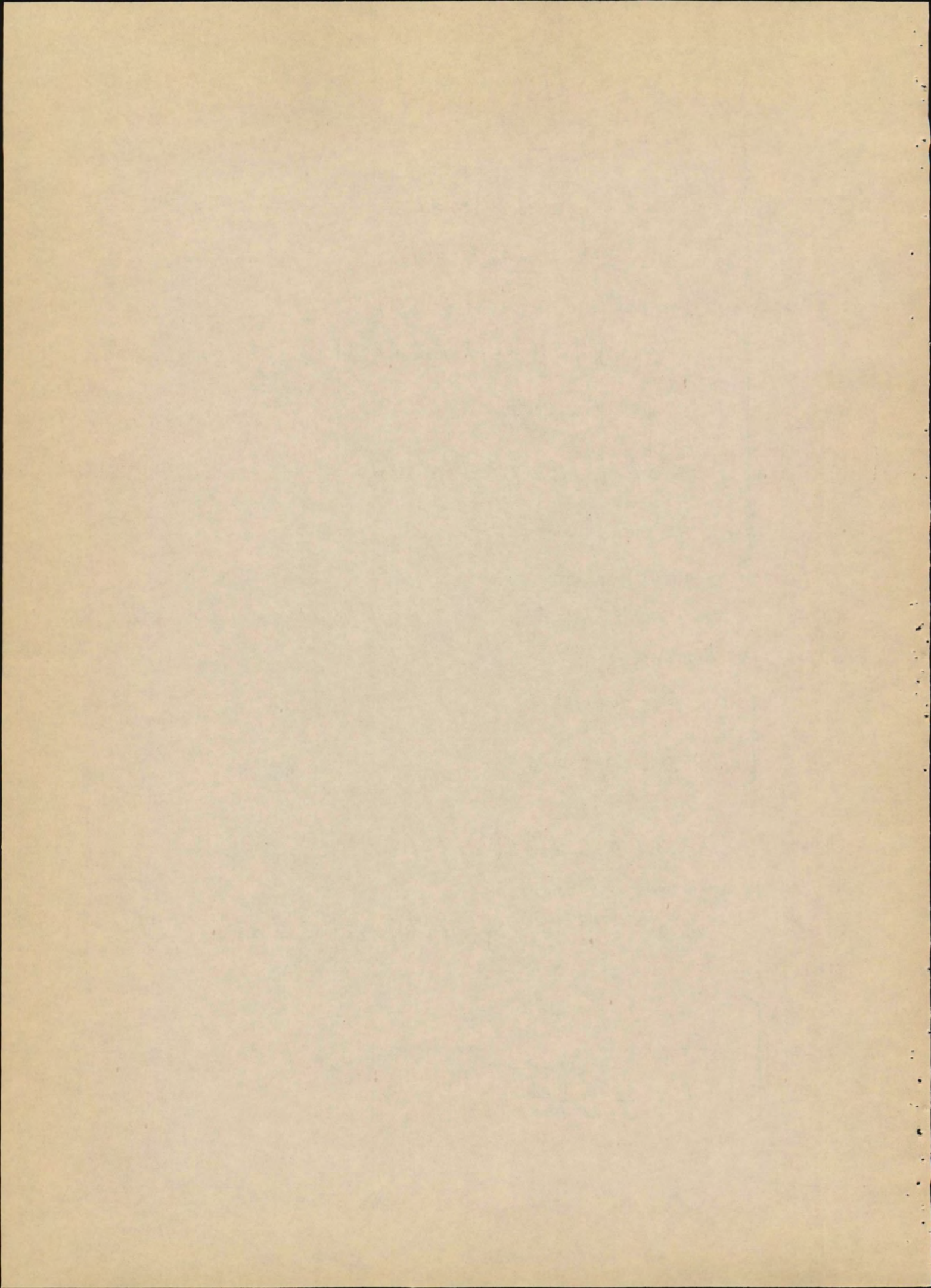
$$(11-5) \quad m_1 = ai D_1 + b i^{\frac{1}{2}} D_2 + j \{ -(1-p^6) \}$$

Hierne gaan we naar w_1 over:

$$(11-6) \quad w_1 = ai^{\frac{1}{2}} \left\{ 27 \int_0^p \frac{1-p^8}{1-p^6} dp \right\} + b i^{\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{36}{7} \int_0^p \frac{1-p^7}{1-p^6} dp \right\} + j i^{-\frac{1}{2}} \left\{ -\int_0^p dp \right\}$$

stel:

$$(11-7) \begin{cases} a) & E_1 = 27 \int_0^p \frac{1-p^8}{1-p^6} dp \\ b) & E_2 = -\frac{36}{7} \int_0^p \frac{1-p^7}{1-p^6} dp \end{cases}$$



De integralen zijn in een samenhangsel (blz.) uitgewerkt. We krijgen nu:

$$(12-1) \quad w_1 = a i^h E_1 + b E_2 + j i^{-h} (-p)$$

vervolgens na en we Δk_1 :

$$(12-2) \quad \Delta k_1 = \int_1^p w_1 (36 a i^h p^6 - 6 b p^5) dp = \int_1^p w_1 d\left(\frac{36}{7} a i^h p^7 - b p^6\right)$$

hierop passen we partiële integratie toe:

$$(12-3) \quad \Delta k_1 = \int_1^p w_1 \left(\frac{36}{7} a i^h p^7 - b p^6\right) - \int_1^p \left(\frac{36}{7} a i^h p^7 - b p^6\right) dw_1$$

en nu is volgens (11-2b)

$$(12-4) \quad dw_1 = \frac{m_1}{1-p^6} dp = \left\{ a i^h 27 \frac{1-p^8}{1-p^6} + b \left(\frac{36}{7}\right) \frac{1-p^7}{1-p^6} - j i^{-h} \right\} dp$$

dus:

$$(12-5) \quad \Delta k_1 = \int_1^p w_1 \left(\frac{36}{7} a i^h p^7 - b p^6\right) - \int_1^p \left(\frac{36}{7} a i^h p^7 - b p^6\right) \frac{m_1}{1-p^6} dp$$

Als we dit uitwerken en voor E_1 resp. E_2 bij $p=1$ zetten E_1^1 en E_2^1 :

$$(12-6) \quad \Delta k_1 = a^2 i \left\{ \frac{36}{7} p^7 E_1 - \frac{36}{7} E_1^1 - \frac{36 \cdot 27}{7} \int_1^p \frac{1-p^8}{1-p^6} p^7 dp \right\} \\ + a b i^h \left\{ \frac{36}{7} p^7 E_2 - p^6 E_1 - \frac{36}{7} E_2^1 + E_1^1 + \frac{36 \cdot 36}{7 \cdot 7} \int_1^p \frac{1-p^7}{1-p^6} p^7 dp + 27 \int_1^p \frac{1-p^8}{1-p^6} p^6 dp \right\} \\ + b^2 \left\{ -p^6 E_2 + E_2^1 - \frac{36}{7} \int_1^p \frac{1-p^7}{1-p^6} p^6 dp \right\} \\ + a j \left\{ -\frac{36}{7} p^8 + \frac{36}{7} + \frac{36}{7} \int_1^p p^7 dp \right\} + b j i^{-h} \left\{ p^7 - 1 - \int_1^p p^6 dp \right\}$$

Stel:

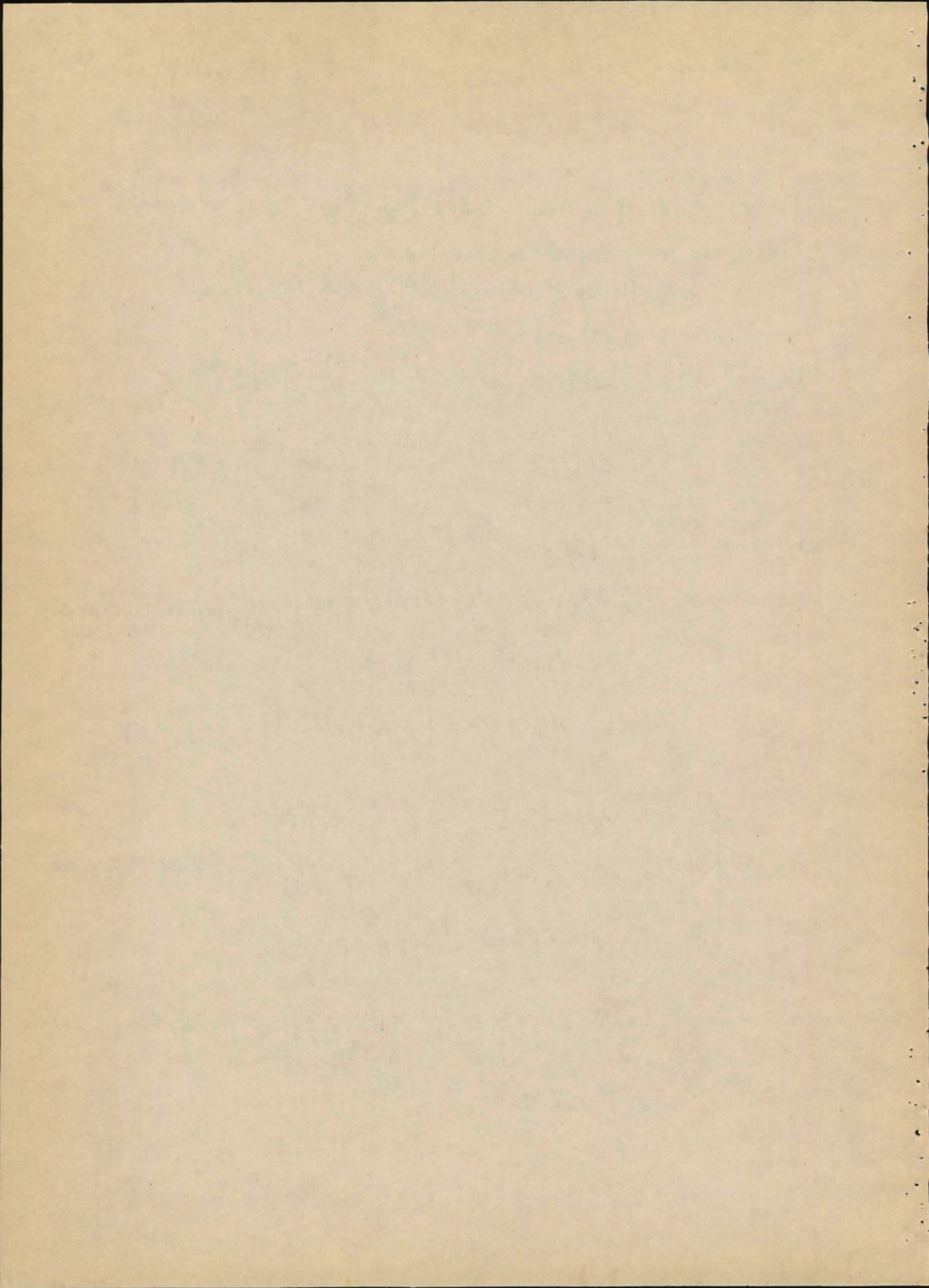
$$(12-7) \quad \begin{cases} a) & F_1 = \frac{36}{7} p^7 E_1 - \frac{36}{7} E_1^1 - \frac{36 \cdot 27}{7} \int_1^p \frac{1-p^8}{1-p^6} p^7 dp \\ b) & F_2 = \frac{36}{7} p^7 E_2 - p^6 E_1 - \frac{36}{7} E_2^1 + E_1^1 + \frac{36 \cdot 36}{7 \cdot 7} \int_1^p \frac{1-p^7}{1-p^6} p^7 dp + 27 \int_1^p \frac{1-p^8}{1-p^6} p^6 dp \\ c) & F_3 = -p^6 E_2 + E_2^1 - \frac{36}{7} \int_1^p \frac{1-p^7}{1-p^6} p^6 dp \end{cases}$$

Deze integralen zijn eveneens in het samenhangsel uitgewerkt. Dan is:

$$(12-8) \quad \Delta k_1 = a^2 i F_1 + a b i^h F_2 + b^2 F_3 + a j \left\{ \frac{2}{2} (1-p^8) \right\} + b j i^{-h} \left\{ -\frac{6}{7} (1-p^7) \right\}$$

Ten slotte bepalen we Δu_1 :

$$(12-9) \quad \Delta u_1 = \int_0^p 3 \Delta k_1 \frac{dp}{1-p^6}$$



ofwel:

$$(13-1) \quad \Delta u_1 = a^2 i^{1/2} \int_0^p \frac{F_1}{1-p^6} dp + ab \int_0^p \frac{F_2}{1-p^6} dp + i^{1/2} b^2 \int_0^p \frac{F_3}{1-p^6} dp + a j i^{-1/2} \int_0^p \frac{1-p^6}{z} dp + b j i^{-1/2} \int_0^p \frac{1-p^6}{z} dp - \frac{1-p^6}{z} \int_0^p \frac{1-p^6}{1-p^6} dp$$

Stel:

$$(13-2) \quad \begin{cases} a) G_1 = 3 \int_0^p \frac{F_1}{1-p^6} dp = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{F_1 z^{-5/6}}{1-z} dz \\ b) G_2 = 3 \int_0^p \frac{F_2}{1-p^6} dp = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{F_2 z^{-5/6}}{1-z} dz \\ c) G_3 = 3 \int_0^p \frac{F_3}{1-p^6} dp = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{F_3 z^{-5/6}}{1-z} dz \end{cases}$$

dan is het resultaat:

$$(13-3) \quad \Delta u_1 = a^2 i^{1/2} G_1 + ab G_2 + b^2 i^{1/2} G_3 + a j i^{-1/2} \frac{1}{2} E_1 + b j i^{-1/2} \frac{1}{2} E_2$$

Hiermede is de eerste periode dus afgelopen. Alvorens men een tweede te beginnen zullen we allereerst het vraagstuk verder afwickelen en onderzoeken in hoeverre de veronderstelling, die we op blz. 9 uitspraken, juist was.

Voor die afwikkeling voeren we de integraties (6-1) uit. Allereerst (6-1b):

$$(13-4) \quad \int_0^1 w dz = \int_0^1 w_1 dz = a i^{1/2} \int_0^1 E_1 dz + b \int_0^1 E_2 dz + j i^{-1/2} \int_0^1 -p dz = 0$$

Stel:

$$(13-5) \quad \begin{cases} a) \int_0^1 E_1 dz = E_1^S \\ b) \int_0^1 E_2 dz = E_2^S \end{cases}$$

In het aanhangsel zijn deze integralen bepaald en gevonden te zijn:

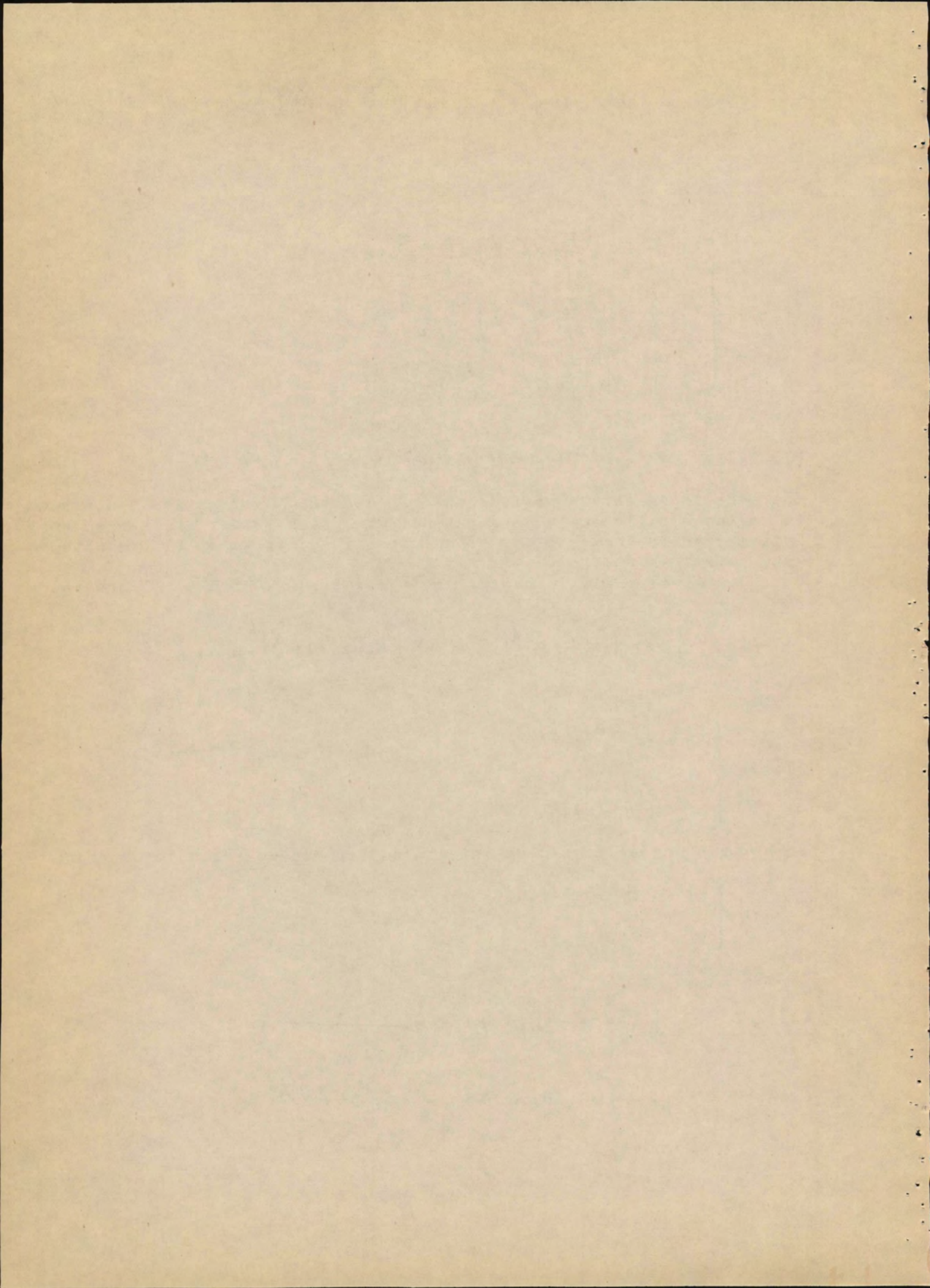
$$(13-6) \quad \begin{cases} a) E_1^S = 24,00 \\ b) E_2^S = -4,50 \end{cases}$$

Verder is:

$$(13-7) \quad \int_0^1 -p dz = -6 \int_0^1 p^6 dp = \frac{6}{7}$$

zoodat:

$$(13-8) \quad j = 28,00 a i - 5,25 b i^{1/2}$$



Deze uitkomst vullen we in in de formules voor m_1 , w_1 ens:

$$(14-1) \quad m_1 = ai \{ D_1 - 20(1-p^6) \} + bi^{1/2} \{ D_2 + 5/4(1-p^6) \}$$

Stel:

$$(14-2) \quad \begin{cases} a) & \bar{D}_1 = D_1 - 28,00(1-p^6) = 27,00(1-p^6) - 28,00(1-p^6) \\ b) & \bar{D}_2 = D_2 + 5,25(1-p^6) = 5,25(1-p^6) - 2,14(1-p^7) \end{cases}$$

dan is:

$$(14-3) \quad m_1 = ai \bar{D}_1 + bi^{1/2} \bar{D}_2$$

Voorts is:

$$(14-4) \quad w_1 = ai^{1/2}(E_1 - 20p) + b(E_2 + 5/4p)$$

Stel:

$$(14-5) \quad \begin{cases} a) & \bar{E}_1 = E_1 - 28,00 p \\ b) & \bar{E}_2 = E_2 + 2,25 p \end{cases}$$

dan is:

$$(14-6) \quad w_1 = ai^{1/2} \bar{E}_1 + b \bar{E}_2$$

Evenzo is:

$$(14-7) \quad \Delta k_1 = a^2 i F_1 + abi^{1/2} F_2 + b^2 F_3 + a \left\{ \frac{q}{2}(1-p^6) \right\} \left\{ 28ai - 5/4 bi^{1/2} \right\} + bi^{1/2} \left\{ -\frac{q}{2}(1-p^7) \right\} \left\{ 28ai - 5/4 bi^{1/2} \right\}$$

Stel:

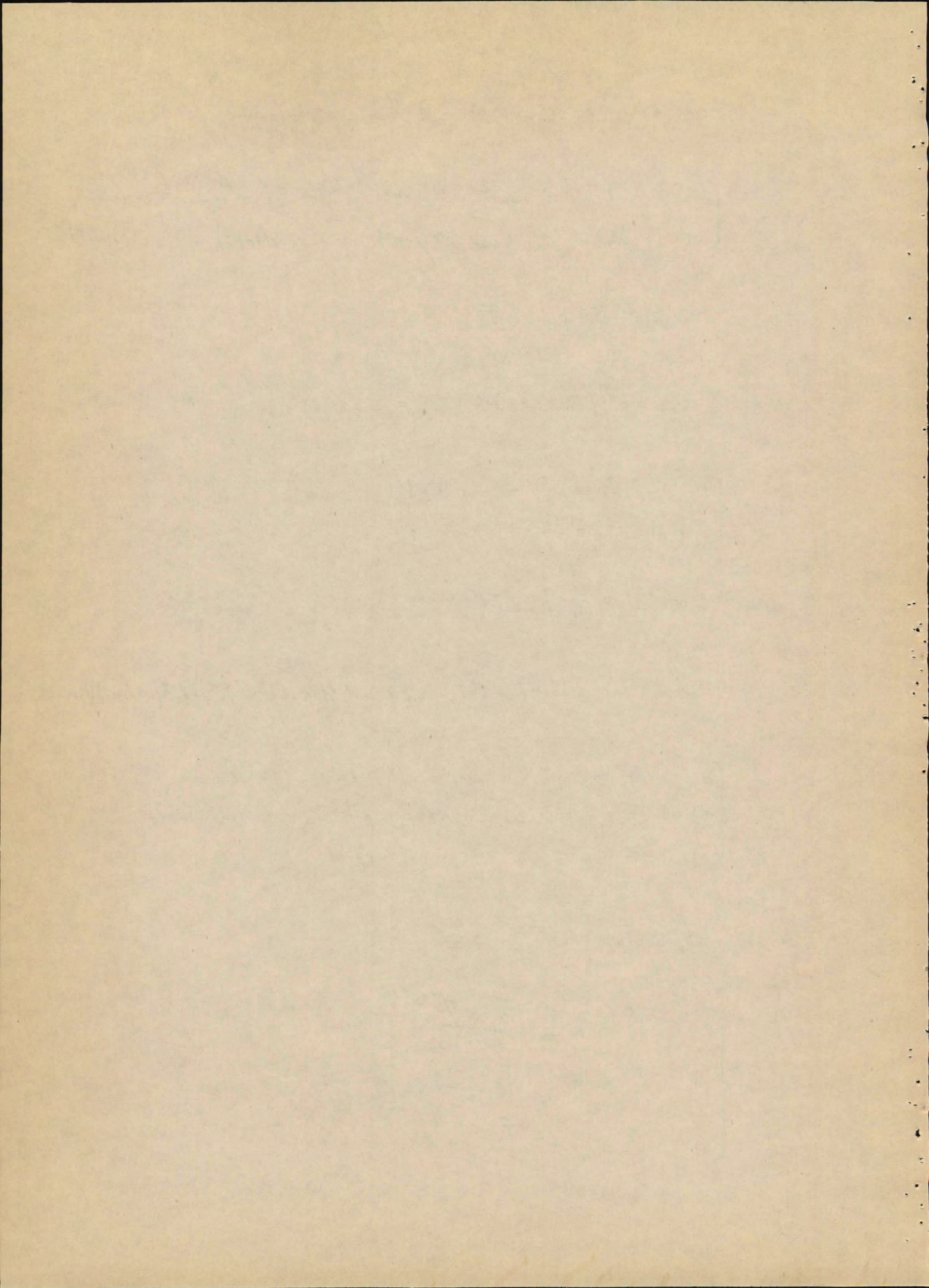
$$(14-8) \quad \begin{cases} a) & \bar{F}_1 = F_1 + 126,00 (1-p^6) \\ b) & \bar{F}_2 = F_2 - 23,625 (1-p^6) - 24,00 (1-p^7) \\ c) & \bar{F}_3 = F_3 + 4,50 (1-p^7) \end{cases}$$

dan is:

$$(14-9) \quad \Delta k_1 = a^2 i \bar{F}_1 + abi^{1/2} \bar{F}_2 + b^2 \bar{F}_3$$

Stel ten slotte:

$$(14-10) \quad \begin{cases} a) & \bar{Q}_1 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{\bar{F}_1 z^{-5/6}}{1-z} dz \\ b) & \bar{Q}_2 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{\bar{F}_2 z^{-5/6}}{1-z} dz \\ c) & \bar{Q}_3 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{\bar{F}_3 z^{-5/6}}{1-z} dz \end{cases}$$



Deze functies kunnen wel grafische of numerieke integratie bepaald worden. In de als bijlage gegeven grafiek zijn de D-, L-, F- en G-functies grafisch uitgezet.

We hebben dus:

$$(15-1) \quad \Delta u_1 = a^2 i^{1/2} \bar{q}_1 + ab \bar{q}_2 + b^2 i^{-1/2} \bar{q}_3$$

Hierna voeren we (6-1a) uit:

$$(15-2) \quad \int_0^1 v dz = \int_0^1 u_0 dz + \int_0^1 \Delta u_1 dz = 1$$

Nu is:

$$(15-3) \quad \int_0^1 u_0 dz = \int_0^1 6 i^{1/2} p^6 p^5 dp = \frac{36}{7} i^{1/2} = 5.14 i^{1/2}$$

en:

$$(15-4) \quad \int_0^1 \Delta u_1 dz = a^2 i^{1/2} \int_0^1 \bar{q}_1 dz + ab \int_0^1 \bar{q}_2 dz + b^2 i^{-1/2} \int_0^1 \bar{q}_3 dz$$

Stel:

$$(15-5) \quad \begin{cases} a) \int_0^1 \bar{q}_1 dz = \bar{q}_1^s \\ b) \int_0^1 \bar{q}_2 dz = \bar{q}_2^s \\ c) \int_0^1 \bar{q}_3 dz = \bar{q}_3^s \end{cases}$$

Deze integralen kunnen grafisch of numeriek bepaald worden. Nu is:

$$(15-6) \quad 1 = 5.14 i^{1/2} + a^2 i^{1/2} \bar{q}_1^s + ab \bar{q}_2^s + b^2 i^{-1/2} \bar{q}_3^s$$

Dit is een vierkantsvergelijking in $i^{1/2}$, wa ruit i exact opgelost kan worden.

Indien we na een latere periode hadden afgebroken, hadden we geen vierkantsvergelijking gevonden, maar een ingewikkelder vergelijking van hoger graad.

De volgende oplossingmethode van (15-6) is niet exact, maar kan analog worden toegepast op de vergelijkingen van hoger orde:

We voeren een fictieve straal \bar{R} in, bepaald door:

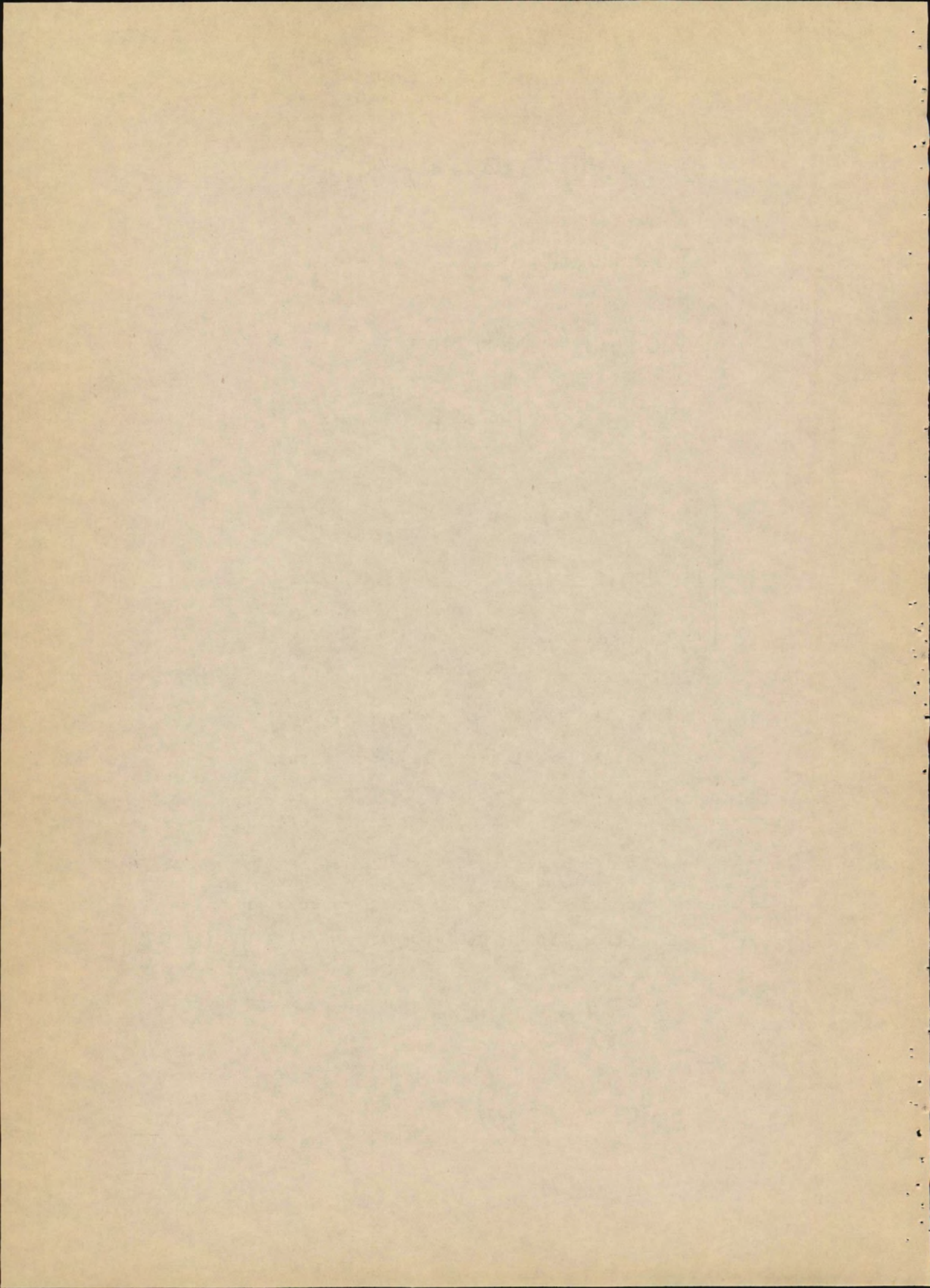
$$(15-7) \quad \frac{1}{\bar{R}^2} = \frac{1}{R^2} + \left\{ \frac{36}{7} \frac{\bar{q}_2^s}{\bar{q}_1^s} \right\} \left\{ \frac{HB}{\rho S} \right\} \frac{1}{R} + \left\{ \left(\frac{36}{7} \right)^2 \frac{\bar{q}_3^s}{\bar{q}_1^s} \right\} \left\{ \frac{HB}{\rho S} \right\}^2$$

en een bijbehorende parameter \bar{a} :

$$(15-8) \quad \bar{a} = \frac{\rho H}{RA} \sqrt{\frac{H}{\epsilon}}$$

zodat voor i_1 , de eerste benadering voor i , geldt:

$$(15-9) \quad 1 = i_1^{1/2} (5.14 + \bar{a}^2 \bar{q}_1^s)$$



voorts voldoet de nulde benadering i_0 aan:

$$(16-1) \quad i = i_0^{1/2} 5.14$$

zoodat:

$$(16-2) \quad i_0 = 0,038$$

Stel nu:

$$(16-3) \quad i_1 = i_0 + \Delta i_1$$

dan is bij benadering:

$$(16-4) \quad \Delta i_1 = \frac{q_1^2}{2,57} \bar{a}^2 i_0 = \frac{0,015}{0,015} q_1^2 \bar{a}^2$$

We zullen nu nagaan of de veronderstelling van blz. 9 gewettigd was. We nemen een zijdelings geval, waarin de gelidelde snelheid 1 m/sec is, de diepte 3 m en de straal van de bocht 1000 m. Voor z nemen we 4 cm. We vinden dan voor a een waarde van 2,2 en voor b van 0,3. Blijkens de grafiek is dan Δu_1 ongeveer -1,5, terwijl u_0 van de orde van 1,0 is. Er is dus wel een belangrijk verschil te verwachten tusschen de snelheidsverdeling met of zonder spiraalstroosing en daarmee valt de veronderstelling van blz. 9 en is de methode van deze paragraaf wel vrijwel veroordeeld. Ook blijkt Δk_1 van de orde van -0,1 te zijn, terwijl k_0 van de orde van 6 is, dus van 0,04, zoodat we ook rekening moeten houden met de mogelijkheid, dat l op sommige dieptes negatief is, dus ook $|\frac{dv}{dz}|$ niet meer ongeveer gelijk aan $\frac{du}{dz}$ is en het stelsel (11-1) niet meer gebruikt mag worden.

3. De methode van het vereenvoudigen van de vergelijkingen.

3a. De lineaire vergelijking met veranderlijke coëfficiënten.

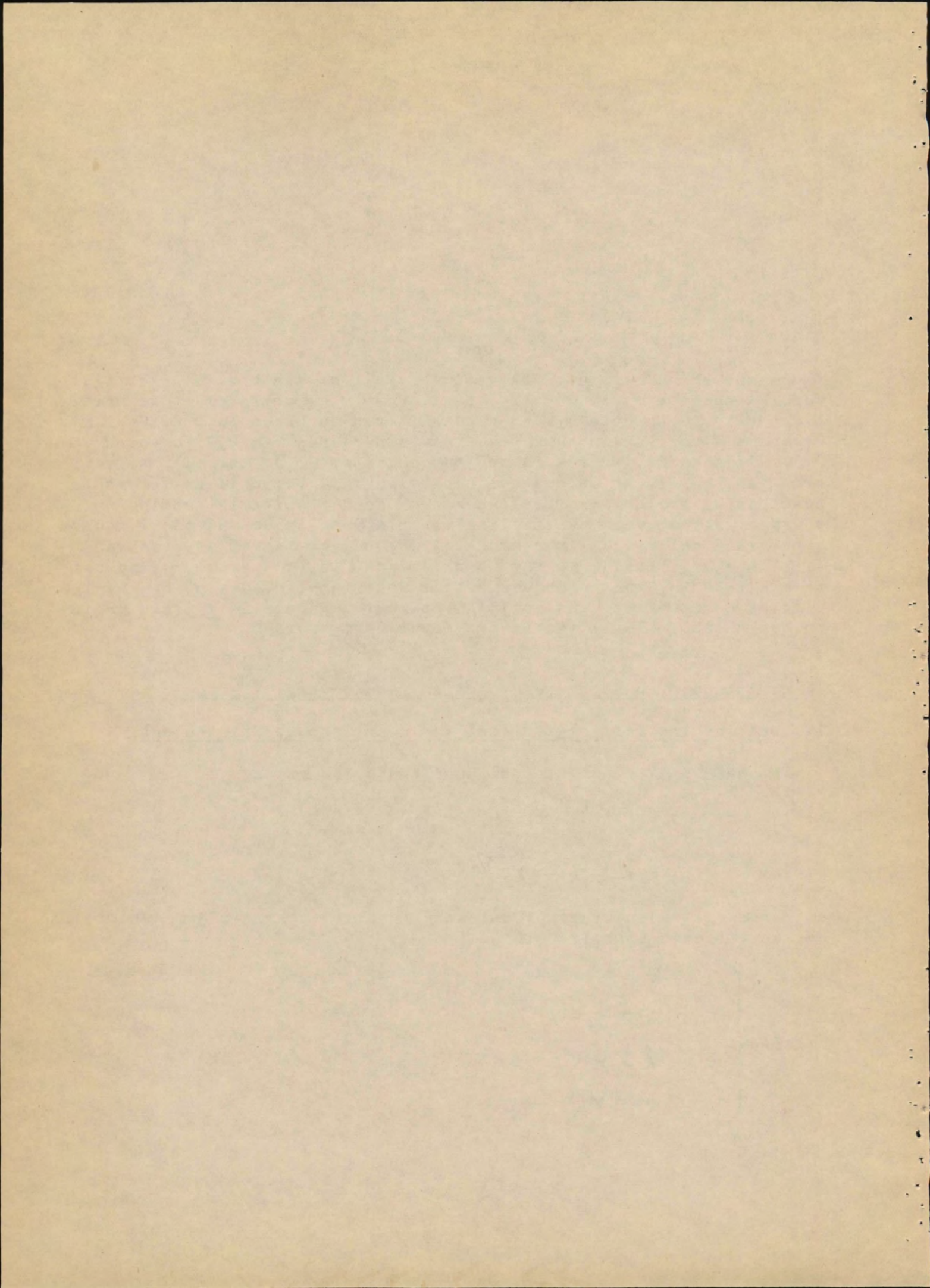
We gaan uit van het stelsel (6-4). Stellen we nu:

$$(16-5) \quad q = av - b$$

$$(16-6) \quad \psi = \left| \frac{dv}{dz} \right| (1-z) z^{5/3}$$

en veronderstellen we even, dat deze functies bekend zijn, dan krijgen we het volgende lineaire stelsel:

$$(16-7) \quad \begin{cases} a) & k' = -i + \psi w \\ b) & m' = j_1 - \psi v \\ c) & k = \psi v' \\ d) & m = \psi w' \end{cases}$$



hieruit elimineren we allereerst k en m :

$$(17-1) \begin{cases} a) & \psi' v' + \psi v'' = -i + \varphi w \\ b) & \psi' w' + \psi w'' = j - \varphi v \end{cases}$$

Uit de eerste dezer vergelijkingen leiden we af:

$$(17-2) \begin{cases} a) & w = \left(\frac{1}{\psi}\right) i + \left(\frac{\psi'}{\psi}\right) v' + \left(\frac{\psi''}{\psi}\right) v'' \\ b) & w' = \left(\frac{1}{\psi}\right)' i + \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)' v' + \left\{2\left(\frac{\psi''}{\psi}\right) + \left(\frac{\psi'''}{\psi}\right)\right\} v'' + \left(\frac{\psi'''}{\psi}\right) v''' \\ c) & w'' = \left(\frac{1}{\psi}\right)'' i + \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)'' v' + \left\{2\left(\frac{\psi'''}{\psi}\right) + \left(\frac{\psi''''}{\psi}\right)\right\} v'' + \left\{\frac{\psi'''}{\psi} + 2\left(\frac{\psi''''}{\psi}\right)\right\} v''' + \left(\frac{\psi''''}{\psi}\right) v'''' \end{cases}$$

Als we dit in (17-1b) invullen, ontstaat een vergelijking van de vorm:

$$(17-3) \quad v'''' + r_3 v''' + r_2 v'' + r_1 v' + r_0 v = \beta$$

warin r_3, r_2, r_1, r_0 en β nog functies van z zijn. Bovenstaande vergelijking is een lineaire vergelijking van de vierde orde met veranderlijke coëfficiënten. We kunnen in beginsel eerst deze vergelijking oplossen door hem eerst in derde orde, daarna in een tweede orde en ten slotte in een eerste orde lineaire vergelijking omzetten. We voeren daartoe eerst een nieuwe veranderlijke η in, die gedefinieerd is door:

$$(17-4) \quad v' = \eta - \varepsilon v$$

differentiëren en elimineren van v' levert:

$$(17-5) \quad v'' = \eta' - \varepsilon \eta + (-\varepsilon' + \varepsilon^2) v$$

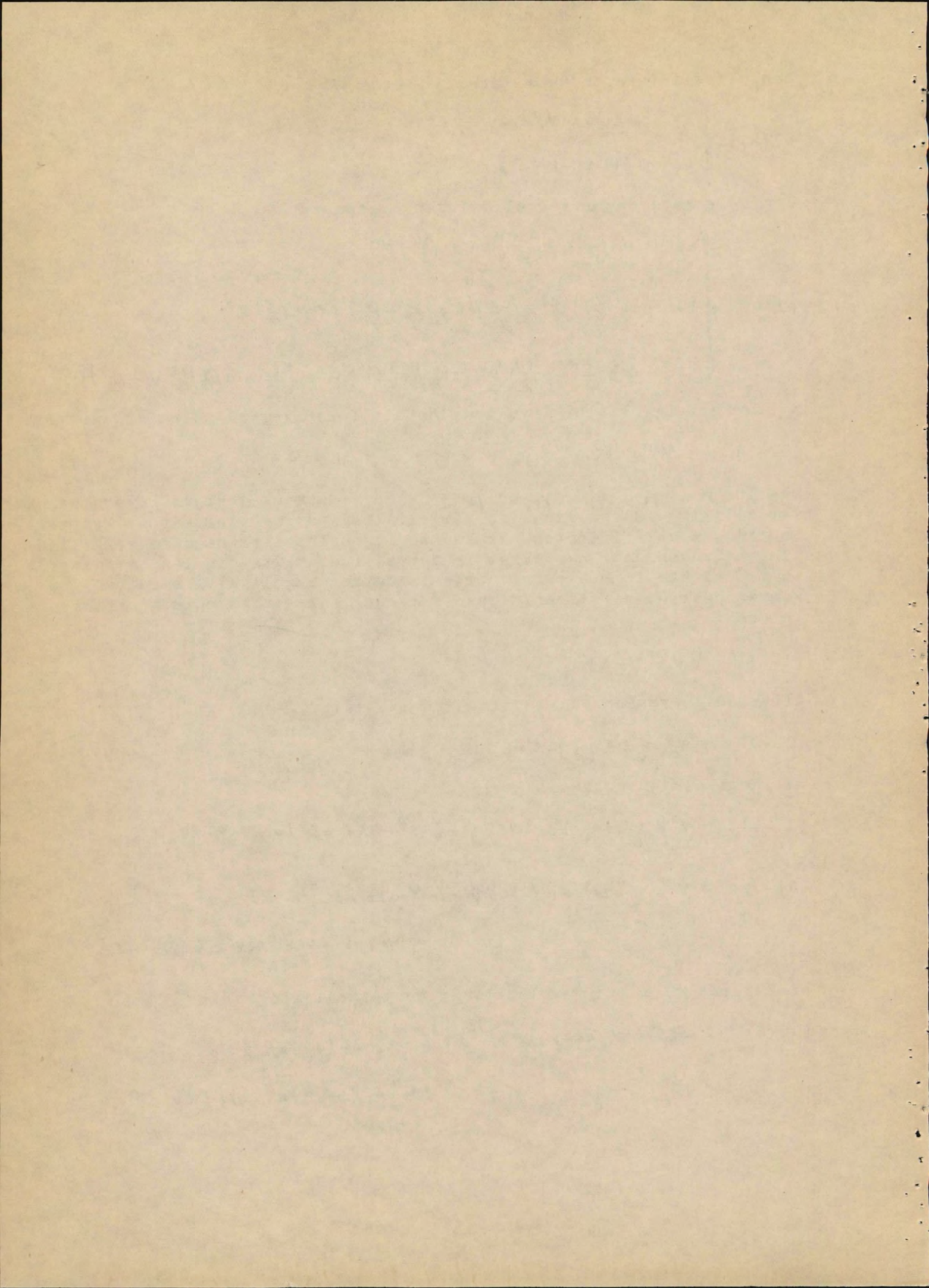
Dit nogmaals en nogmaals toegepast:

$$(17-6) \quad v''' = \eta'' - \varepsilon \eta' + (\varepsilon^2 - 2\varepsilon') \eta + (-\varepsilon'' + 3\varepsilon \varepsilon' - \varepsilon^3) v$$

$$(17-7) \quad v'''' = \eta''' - \varepsilon \eta'' + (\varepsilon^2 - 3\varepsilon') \eta' + (-\varepsilon''' + 5\varepsilon \varepsilon' - 3\varepsilon'') \eta + (-\varepsilon'''' + 4\varepsilon \varepsilon'' + 3\varepsilon'^2 - 6\varepsilon^2 \varepsilon' + \varepsilon^4) v$$

We vergen nu, dat ε voldoet aan de vergelijking:

$$(17-8) \quad -\varepsilon'''' + \varepsilon''(4\varepsilon - r_3) + 3\varepsilon'^2 + \varepsilon'(-6\varepsilon^2 + 3\varepsilon r_3 - r_2) + \varepsilon^4 - \varepsilon^3 r_3 + \varepsilon^2 r_2 - \varepsilon r_1 + r_0 = 0$$



en dan blijkt bij invullen van (17-4), (17-5), (17-6) en (17-7) in (17-3) de veranderlijke V juist weg te vallen wegens (17-8), zoodat we een vergelijking in η overhouden van de vorm:

$$(18-1) \quad \eta''' + \eta''(\gamma_3 - \varepsilon) + \eta'(\gamma_2 - \gamma_3 \varepsilon + \varepsilon^2 - 3\varepsilon') + \eta\{\gamma_1 - \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3(\varepsilon^2 - 3\varepsilon') - \varepsilon^3 + 5\varepsilon\varepsilon' - 3\varepsilon''\} = \beta$$

We hebben dus een lineaire vergelijking van de derde orde voor η verkregen, indien we maar een oplossing voor ε kunnen vinden, die aan (17-8) voldoet. De moeilijkheid is dus verplaatst naar het oplossen van de nietlineaire vergelijking van de derde orde voor ε . Een voordeel kan het soms zijn, dat één willekeurige oplossing voldoende is. Hier schijnt het met (17-8) echter niet erg op en we zullen dus nog verder moeten vereenvoudigen.

3b. De lineaire vergelijking met veranderlijke coëfficiënten.

We stellen:

$$(18-2) \quad V = 1 + S$$

en verwaarloozen het kwadraat s^2 en het product Sw en eveneens de Corioliskracht, dus de grootheid β . Voorts nemen we voor

$$(18-3) \quad \gamma = \left| \frac{dV}{dz} \right| (1-z) z^{5/3}$$

een of andere middelwaarde c . De vergelijkingen worden nu:

$$(18-4) \quad \begin{cases} a) & k' = -i + a w \\ b) & m' = j - a + 2a s \\ c) & k = c s' \\ d) & m = c w' \end{cases}$$

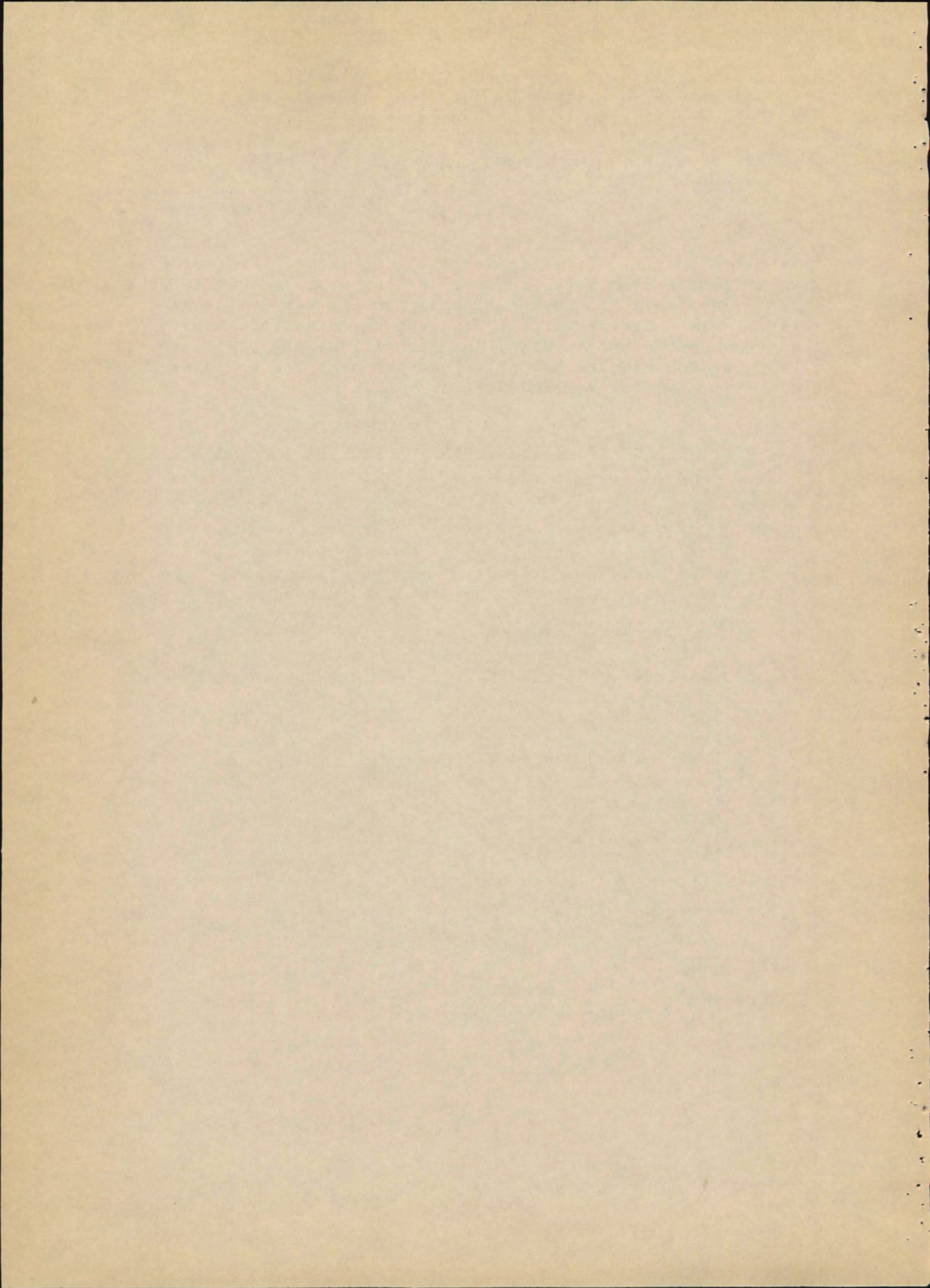
Eliminatie van k , m en w levert aan:

$$(18-5) \quad s'''' + \frac{2a^2}{\varepsilon^2} \left(s - \frac{j-a}{2a} \right) = 0$$

Stel:

$$(18-6) \quad s - \frac{j-a}{2a} = V - 1 - \frac{j-a}{2a} = \tilde{s}$$

dan is:



$$(19-1) \begin{cases} a) & k = c \tilde{s}' \\ b) & w = \frac{i}{a} + \frac{c}{a} \tilde{s}'' \\ c) & m = \frac{c^2}{a} \tilde{s}''' \end{cases}$$

en verder is:

$$(19-2) \quad \tilde{s}'''' + \frac{2a^2}{c^2} \tilde{s} = 0$$

Als k de positief reële wortel is van:

$$(19-3) \quad n = \sqrt[4]{\frac{a^2}{2c^2}}$$

dan is de oplossing van (19-2):

$$(19-4) \quad \tilde{s} = C_1 e^{nz} \cos nz + C_2 e^{nz} \sin kz + C_3 e^{-nz} \cos uz + C_4 e^{-nz} \sin kz$$

waarin C_1, C_2, C_3 en C_4 integratieconstanten zijn, die moeten worden aangepast aan de randvoorwaarden:

$$(19-5) \begin{cases} a) & \text{Voor } z=0 \text{ is } \tilde{s} = -1 - \frac{1-a}{2a} \\ b) & \text{,, ,, ,, } W = 0 \text{ dus } \tilde{s}'' = -\frac{i}{c} \\ c) & \text{,, } z=1 \text{ ,, } k = 0 \text{ ,, } \tilde{s}' = 0 \\ d) & \text{,, ,, ,, } m = 0 \text{ ,, } \tilde{s}''' = 0 \end{cases}$$

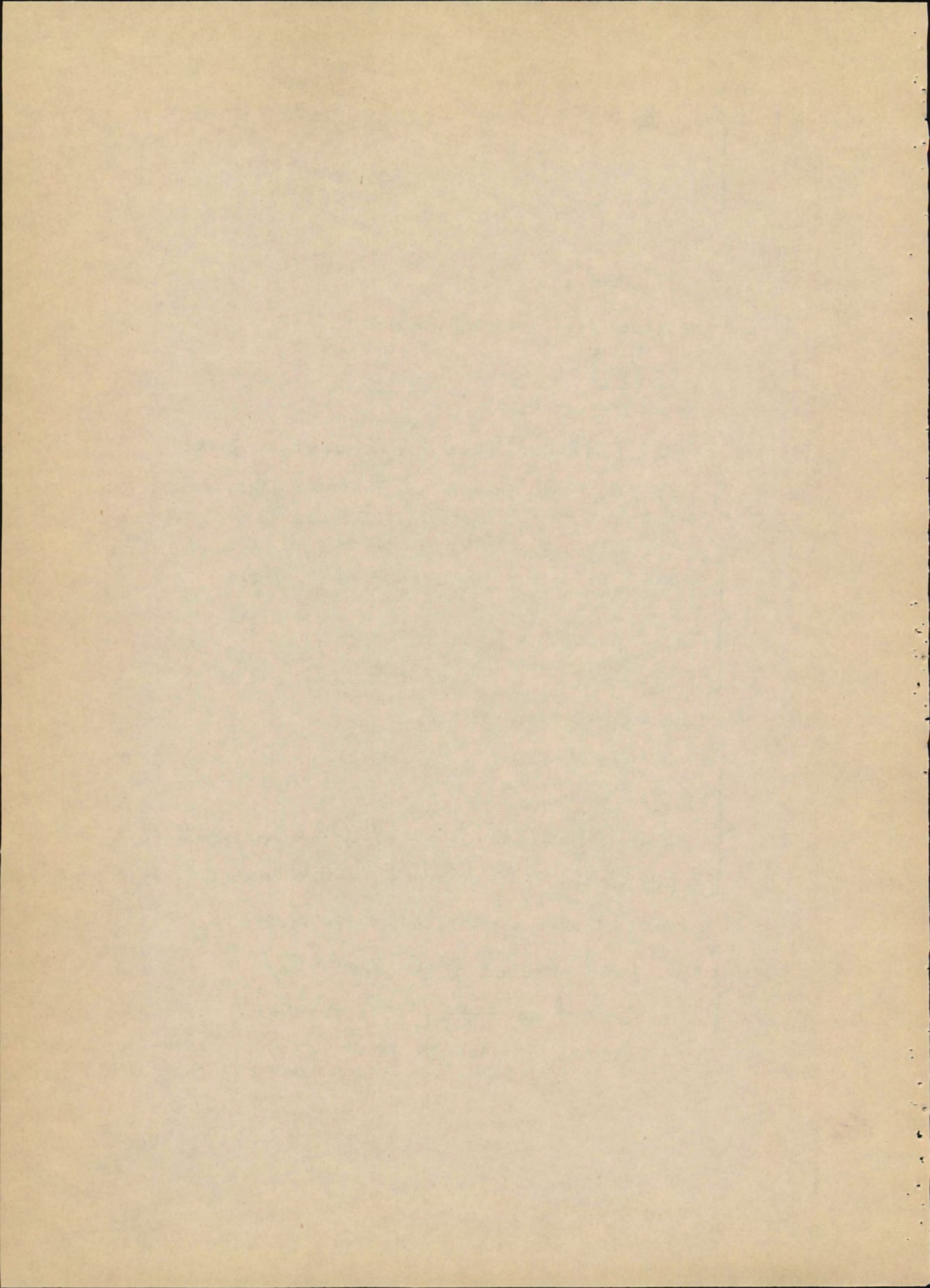
Dit levert de volgende vergelijkingen:

$$(19-6) \begin{cases} a) & C_1 + C_3 = -1 + \frac{a-1}{2a} \\ b) & C_2 - C_4 = -\frac{i}{a\sqrt{2}} \\ c) & (C_1 + C_2)e^{nk} \cos u + (-C_1 + C_2)e^{nk} \sin u + (-C_3 + C_4)e^{-nk} \cos u + (-C_3 - C_4)e^{-nk} \sin u \\ d) & (-C_1 + C_2)e^{nk} \cos u + (-C_1 - C_2)e^{nk} \sin u + (C_3 + C_4)e^{-nk} \cos u + (-C_3 + C_4)e^{-nk} \sin u \end{cases}$$

De twee continuïteitsvergelijkingen leveren verder nog:

$$(19-7) \begin{cases} a) & j-a = -m_{z=0} = \frac{a}{k} (C_1 - C_2 - C_3 - C_4) \\ b) & i = k_{z=0} = \frac{a}{n\sqrt{2}} (C_1 + C_2 - C_3 + C_4) \end{cases}$$

Dit combineren we met (19-6a&b) en op (19-6c&d) passen we optellen en aftrekken toe na vermenigvuldigen met $\cos k$ en $\sin k$ op gepaste wijze.



$$(20-1) \begin{cases} a) C_1(-1-2u) + C_2 + C_3(1-2u) + C_4 = 2u \\ b) C_1 + C_2(1+2u) + C_3 + C_4(1-2u) = 0 \\ c) -C_1 e^{n \sin u} + C_2 e^{n \cos u} - C_3 e^{-n \sin u} + C_4 e^{-n \cos u} = 0 \\ d) C_1 e^{n \cos u} + C_2 e^{n \sin u} - C_3 e^{-n \cos u} - C_4 e^{-n \sin u} = 0 \end{cases}$$

Uit dit stelsel kunnen de integratieconstanten berekend worden en dan volgen uit (19-7) de beide verhangen, zoodat:

$$(20-2) \begin{cases} a) V = 1 + \frac{1-a}{2a} + C_1 e^{nz \cos uz} + C_2 e^{nz \sin uz} + C_3 e^{-nz \cos uz} + C_4 e^{-nz \sin uz} \\ b) W = \frac{i}{a} + \sqrt{2} C_2 e^{nz \cos uz} - \sqrt{2} C_1 e^{nz \sin uz} - \sqrt{2} C_4 e^{-nz \cos uz} + \sqrt{2} C_3 e^{-nz \sin uz} \end{cases}$$

We beschouwen nu het geval van een gemiddelde snelheid van 1 m/sec, een diepte van 5 m, een straal van 1000 m en een waarde van ϵ van 4 cm. Voor C nemen we de waarde van 0,04, zijnde ongeveer de gemiddelde waarde van ψ , als we voor $|\frac{d\psi}{dz}|$ de functie $7/36 z^{-7/6}$ nemen, die optreedt in het geval zonder spiraalstrooming. We vinden o.a.:

$$(20-3) \quad i = 0,31$$

en

$$(20-4) \quad j = 2,56$$

In fig. 2. is een vector-diagram van \bar{u} , in fig. 3. een grafiek van V en W tegen Z aangegeven. In fig. 4. is voor het geval zonder spiraalstrooming V tegen Z uitgezet, eerst zoodat het werkelijk het geval is en daarna zoodat zou volgen uit de vereenvoudigde vergelijkingen (18-4). Hieruit kan een indruk verkregen worden.

Fig. 2.

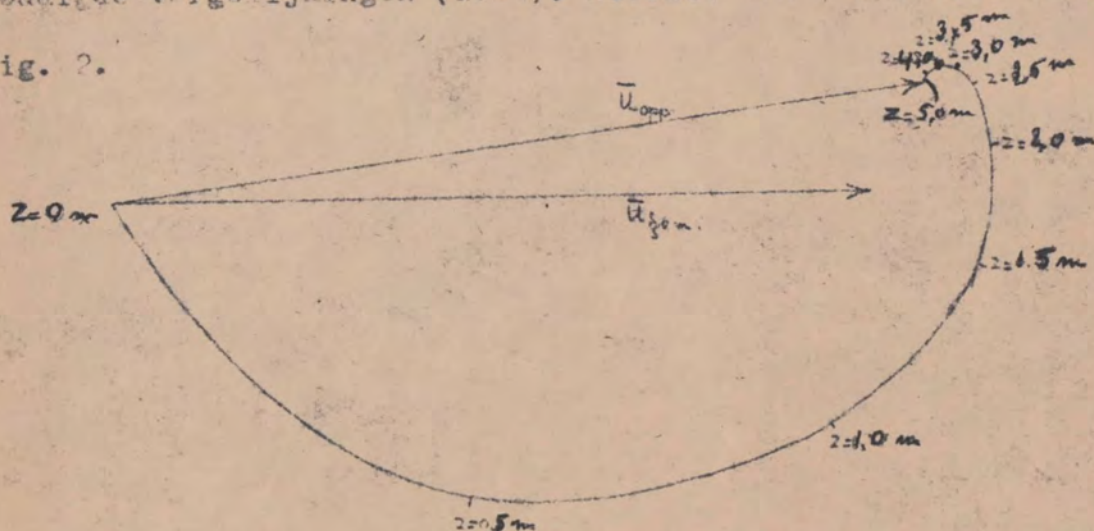


Fig. 3.

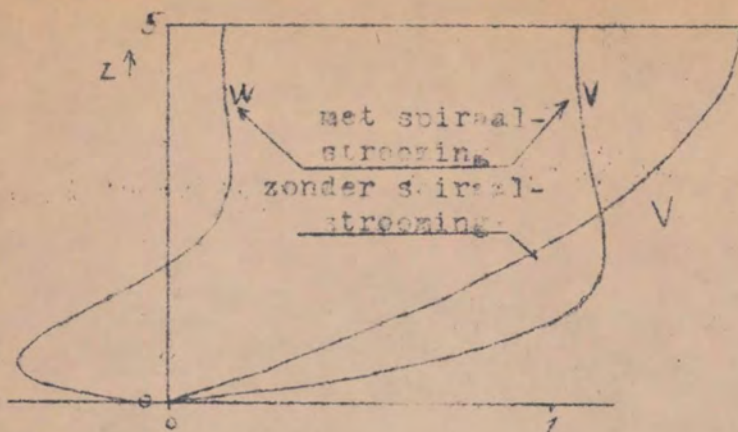


Fig. 4.

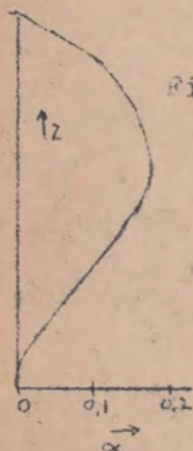
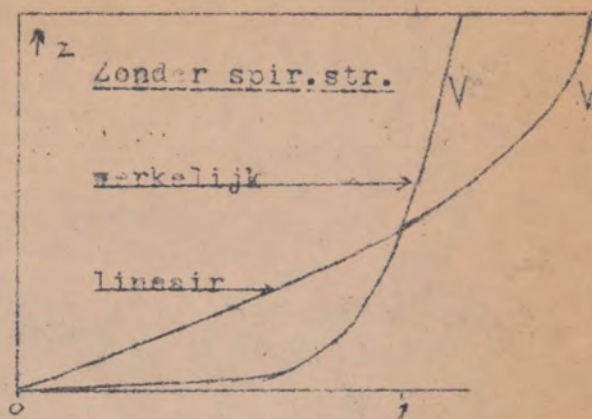


Fig. 5.

worden van de betekenis van de fout, die we maken, als we de vergelijkingen tot (18-4) vereenvoudigen. Hieruit blijkt a.i., dat de waarde van de uitkomsten van deze paragraaf quantitatief zeker niet erg hoog mogen worden aangeslagen. Qualitatief lijkt het me echter wel verantwoord te besluiten, uit fig. 3, dat door de spiraalstrooising de snelheden aan de oppervlakte verkleind en meer in de diepte vergroot zullen worden en dat de richting van de snelheid aan de oppervlakte naar de buitenbocht en bij de bodem naar de binnenbocht zal zijn.

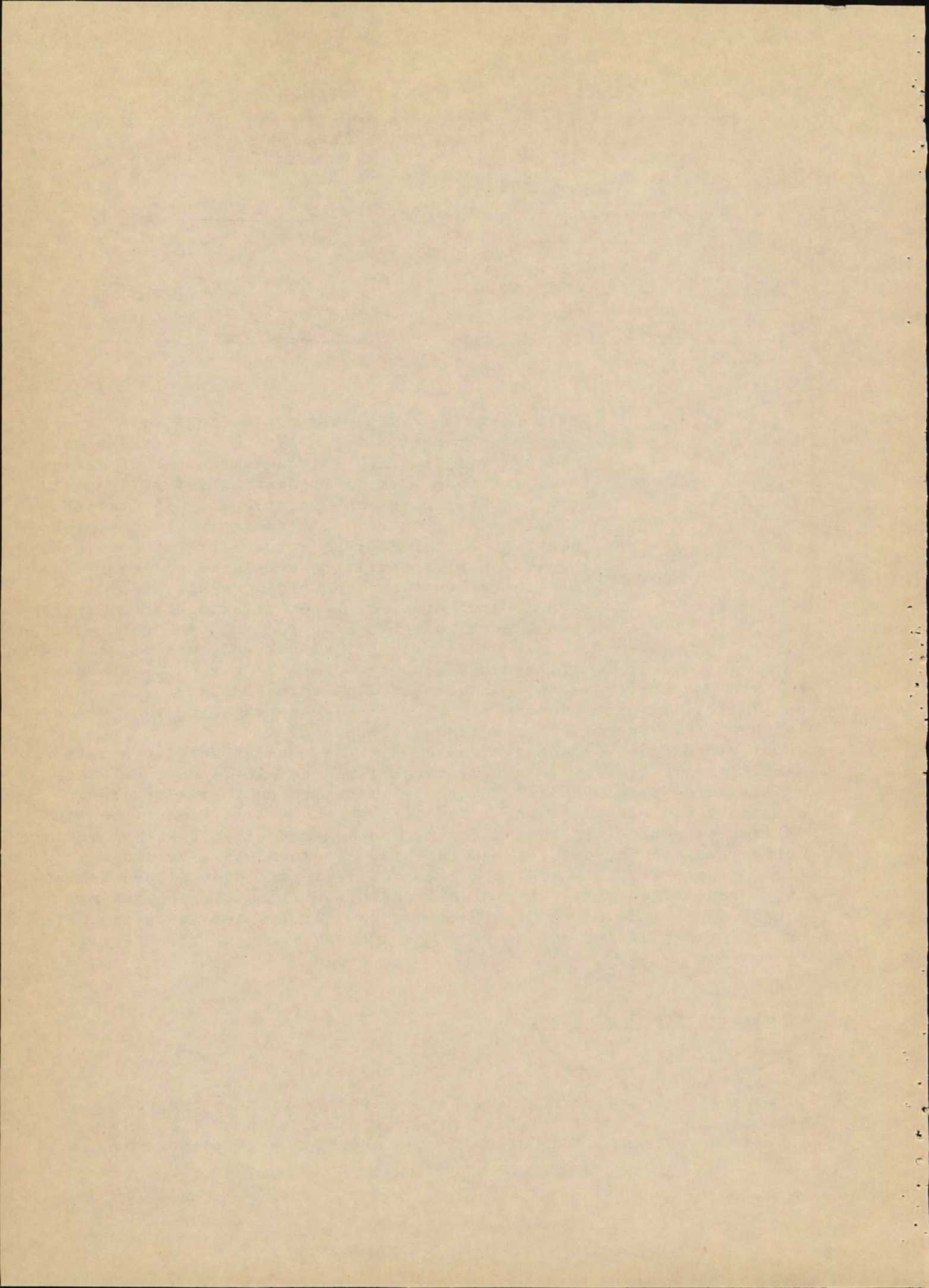
Uit de figuren blijkt ook wel, dat we op sommige die tes met een tekenoekering van $\frac{dv}{dz}$ en dus ook van L moeten rekening houden, zoodat we met de stelsels (6-2) en (7-1) voorzichtig moeten zijn. Dit is een bevestiging van wat we aan het eind van par. 2b ook reeds vermoeden.

Er kan nog aan gedacht worden de hier beschreven methode aan te wenden voor het oplossen van de vergelijkingen (16-7) door het integratiegebied in een aantal vakken te verdeelen en in elk vak een constante middelwaarde van de functies φ en ψ te kiezen en dan in dat vak te werken met een oplossing van de vorm (19-4). Nu kan echter worden aangetoond, dat met een functie, die zeer sterk verandert als ψ (zie fig. 5.) een dergelijke oplossingsmethode alleen behoorlijke resultaten geeft, als we de vakken zeer klein kiezen, dat het verantwoord is de eenvoudiger methode van par. 4b toe te passen, die er op berust, dat we in iedere vak een oplossing van lineaire vorm toepassen.

4. Algebraïsche methoden.

4a. Reeksontwikkeling.

We zullen het stelsel (7-1) bezien. Bij de hier te bespreken methode ontwikkelen we elk der veranderlijken u , w , k en m in een reeks van bekende functies. Het eenvoudigste is meestal een macht-



reeks en die zullen we ook hier toe passen.
We stellen dus:

$$(22-1) \begin{cases} a) & u = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots \\ b) & w = w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + \dots \\ c) & k = k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + \dots \\ d) & m = m_0 + m_1 z + m_2 z^2 + \dots \end{cases}$$

en zoeken op, dat de eerste twee randvoorwaarden al meteen leveren:

$$(22-2) \begin{cases} a) & u_0 = 0 \\ b) & w_0 = 0 \end{cases}$$

De andere twee leveren:

$$(22-3) \begin{cases} a) & k_0 + k_1 + k_2 + \dots = 0 \\ b) & m_0 + m_1 + m_2 + \dots = 0 \end{cases}$$

Voorts werken we op, dat de functie $\alpha = (1-z) z^{5/3}$ willekeurig dicht te benaderen is in het interval $0 < z < 1$ met een machtreeks, dus:

$$(22-4) \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots$$

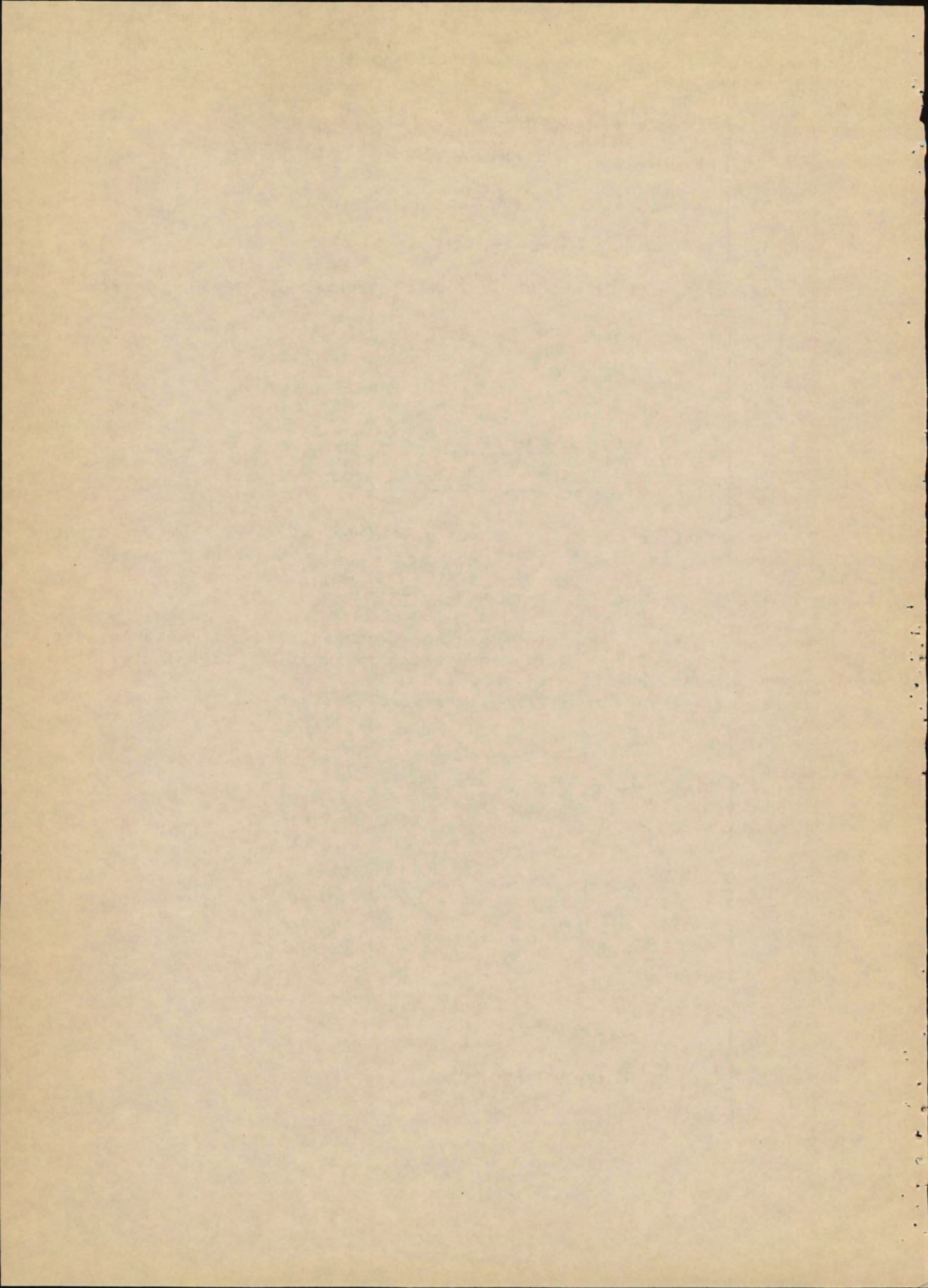
Het bepalen van de coëfficiënten kan geschieden door te eischen, dat de middelbare afwijking tusschen reeks en functie minimaal zij. Zie verder blz. 36 schriftopgave nr. 4.

Bij uitwerken der differentiaalvergelijkingen krijgen we:

$$(22-5) \begin{cases} a) & k_1 = -i \\ b) & k_2 = -6w_1 \\ & \text{enz.} \end{cases}$$

$$(22-6) \begin{cases} a) & m_1 = j \\ b) & m_2 = 6u_1 \\ & \text{enz.} \end{cases}$$

$$(22-7) \begin{cases} a) & k_0 = \alpha_0 u_1^2 \\ b) & k_1 = \alpha_1 u_1^2 + 2\alpha_0 u_1 u_2 \\ & \text{enz.} \end{cases}$$



$$(23-1) \begin{cases} a) & m_0 = \alpha_0 u, w_1 \\ b) & m_1 = \alpha_1 u, w_1 + \alpha_0 (u_2 w_1 + u_1 w_2) \\ \text{enz.} & \end{cases}$$

Verder blijkt bij uitwerken der continuïteitsvergelijkingen:

$$(23-2) \begin{cases} a) & \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{3} u_2 + \dots = 1 \\ b) & \frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{3} w_2 + \dots = 0 \end{cases}$$

We zullen het oplossen van dit stelsel demonstreeren aan het geval, dat we ons tot een quadratische benadering beperken. Weliswaar is die benadering zeer ruw, maar in beginsel verloopt het oplossen bij betere benaderingen analog.

We zullen allereerst een oplossing voor u_1 zoeken. Uit (23-2) volgt:

$$(23-3) \begin{cases} a) & u_2 = 3 - \frac{3}{2} u_1 \\ b) & w_2 = -\frac{3}{2} w_1 \end{cases}$$

we vullen dit in (22-4b) en (23-1b) in:

$$(23-4) \begin{cases} a) & k_1 = \alpha_1 u_1^2 + 6\alpha_0 u_1 - 3\alpha_0 u_1^2 = (\alpha_1 - 3\alpha_0) u_1^2 + 6\alpha_0 u_1 \\ b) & m_1 = \alpha_1 u_1 w_1 + 3\alpha_0 w_1 - 3\alpha_0 u_1 w_1 = (\alpha_1 - 3\alpha_0) u_1 w_1 + 3\alpha_0 w_1 \end{cases}$$

Vullen we nu (22-7a), (23-4a) en (22-5b) in in (22-3a) en (23-1a), (23-4b) en (22-6b) in (22-3b), dan is het resultaat:

$$(23-5) \begin{cases} a) & (\alpha_1 - 2\alpha_0) u_1^2 + 6\alpha_0 u_1 - b w_1 = 0 \\ b) & (\alpha_1 - 2\alpha_0) u_1 w_1 + 3\alpha_0 w_1 + b u_1 = 0 \end{cases}$$

Deel de eerste dezer vergelijkingen door u_1 en de tweede door w_1 en trek dan de tweede van de eerste af, dan is:

$$(23-6) \quad \frac{w_1}{u_1} + \frac{u_1}{w_1} = 3 \frac{\alpha_0}{b}$$

Stel κ de oplossing der vierkantsvergelijking:

$$(23-7) \quad \kappa + \frac{1}{\kappa} = 3 \frac{\alpha_0}{b}$$

dan is:

$$(23-8) \quad w_1 = \kappa u_1$$

Als we dit invullen in (23-5a), dan is, als we de oplossing $u_1 = 0$ uitsluiten:

$$(23-1) \quad u_1 = \frac{bu - 6\alpha_0}{\alpha_1 - 2\alpha_0}$$

Hieruit volgen dan: k_1 uit (23-4a), m_1 uit (23-4b) en w_1 uit (23-8) en dus zijn dan i en j uit (22-5a) en (22-6a) bekend.

Needzakelijk is dus o.a. het oplossen van een vierkantsvergelijking (23-7). Indien we een benadering van hooger orde graad dan de tweede toepassen, wordt die vergelijking ingewikkelder en van hooger graad. Een bezwaar van deze methode is wel, dat steeds die hogeregradsvergelijking opgelost moet worden.

4b. Differentievergelijking.

We gaan weer uit van (7-1) en verdeelen het integratiegebied $0 < z < 1$ in een aantal vakken in, die klein zijn. Zij aan het begin van het n -de vak, dat een lengte Δz_n moge hebben, de waarden der functies k , m , u en w respectievelijk k_{n-1} , m_{n-1} , u_{n-1} en w_{n-1} en zij in dat vak α_n een middelwaarde van de functie $\alpha = (1-z)z^{1/3}$, dan bepalen we de waarden k_n , m_n , u_n en w_n dier functies aan het eind van het vak uit:

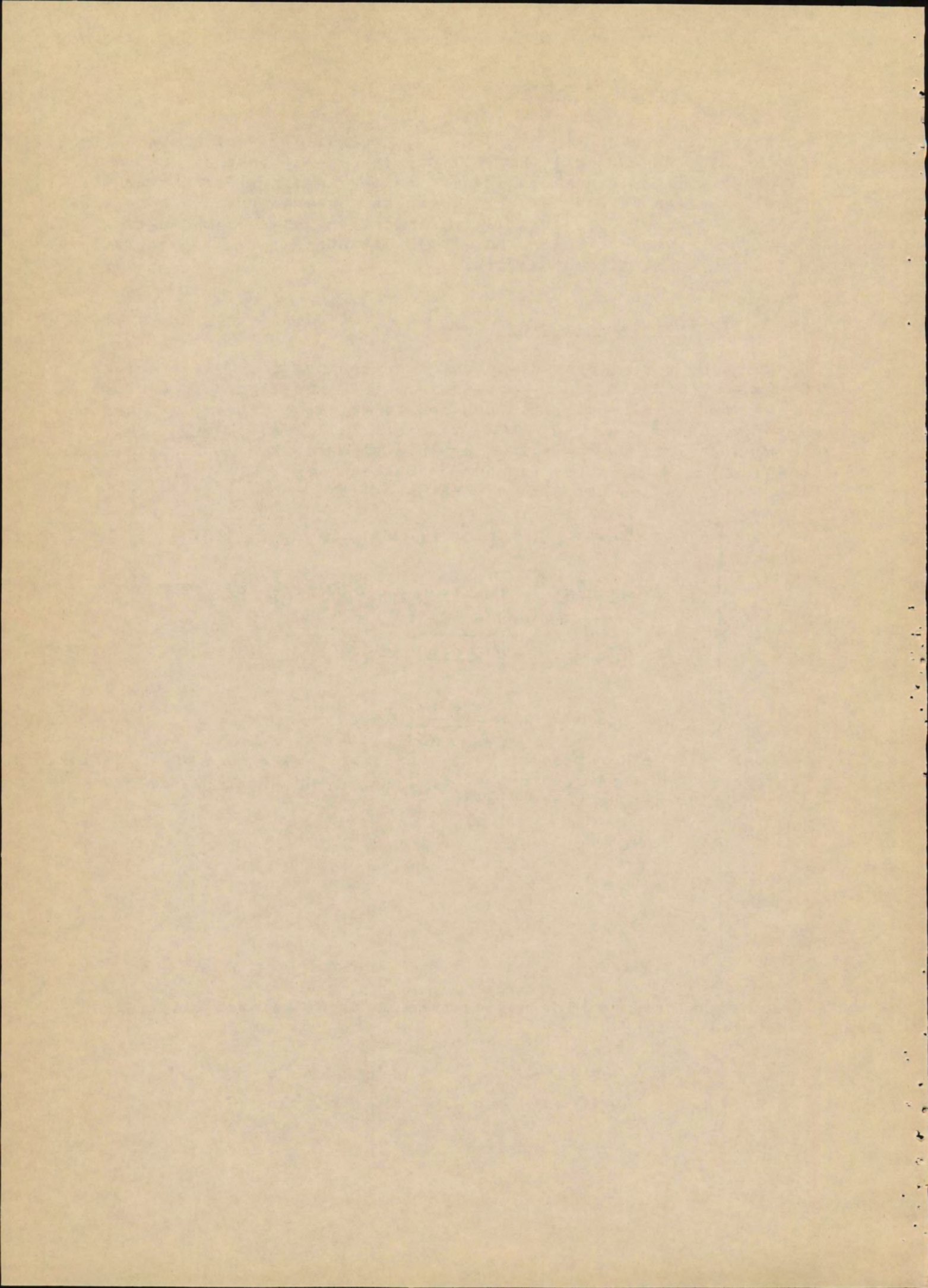
$$(24-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad k_n = k_{n-1} + \{ -i + (au_{n-1} - b)w_{n-1} \} \Delta z_n \\ b) \quad m_n = m_{n-1} + \{ j - (au_{n-1} - b)u_{n-1} \} \Delta z_n \\ c) \quad u_n = u_{n-1} + \sqrt{\frac{k_{n-1}}{\alpha_n}} \Delta z_n \\ d) \quad w_n = w_{n-1} + \frac{m_{n-1}}{\sqrt{k_{n-1} \alpha_n}} \Delta z_n \end{array} \right.$$

Stel, dat we N vakken hebben, dan levert (24-2) ons $4N$ vergelijkingen. Er zijn verder $4N+4$ grootheden k_n , m_n , u_n en w_n , waarvan er 4 gegeven zijn uit de randvoorwaarden:

$$(24-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad u_0 = 0 \\ b) \quad w_0 = 0 \\ c) \quad k_N = 0 \\ d) \quad m_N = 0 \end{array} \right.$$

Voorts moeten we hier nog de twee continuïteitsvergelijkingen aan toevoegen:

$$(24-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad \frac{1}{2}u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{N-1} + \frac{1}{2}u_N = \frac{1}{2}N \\ b) \quad \frac{1}{2}w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_{N-1} + \frac{1}{2}w_N = 0 \end{array} \right.$$



zoodat de grootheden in beginsel alle te bepalen zijn. Een groot bezwaar is echter, dat de vergelijkinge niet lineair zijn en dat niet k_0 en m_0 maar k_N en m_N gegeven zijn. De beste methode van oplossen zal nog wel zijn, van i, j, k_0 en m_0 een rassing te maken, dan successievelijk voor alle vakken de grootheden te berekenen en tenslotte k_N en m_N te bepalen, die dan natuurlijk wel zullen blijken niet nul te zijn. We corrigeeren dan de aanname voor i en j, k_0 en m_0 en herhalen het heele proces. Voor het zoo doeltreffend mogelijk uitvoeren van die correctie kunnen methodes ontrikkeld worden. We zullen daar niet verder op ingaan na te hebben opgemerkt, dat ook de coëfficiënten van de methode der vorige paragraaf met een dergelijke methode berekend kunnen worden.

De hier beschreven methode, die er eigenlijk op neer komt, dat in ieder vak een lineaire benadering gebruikt wordt, kan gecombineerd worden met de methode der vorige paragraaf, door het integratiegebied in een aantal vakken te verdeelen en in elk vak een reeksontwikkeling toe te passen. Er is geen reden om aan te nemen, dat zoo'n combinatie hier bepaalde voordeelen heeft.

We zullen nog even nagaan hoe de vergelijkingen worden, als we ons niet ten doel stel en het stelsel (7-1) maar het lineaire stelsel (16-7) op te lossen. We hebben dan, als φ_n en χ_n middelwaarden van φ resp. χ zijn in het n-de vak:

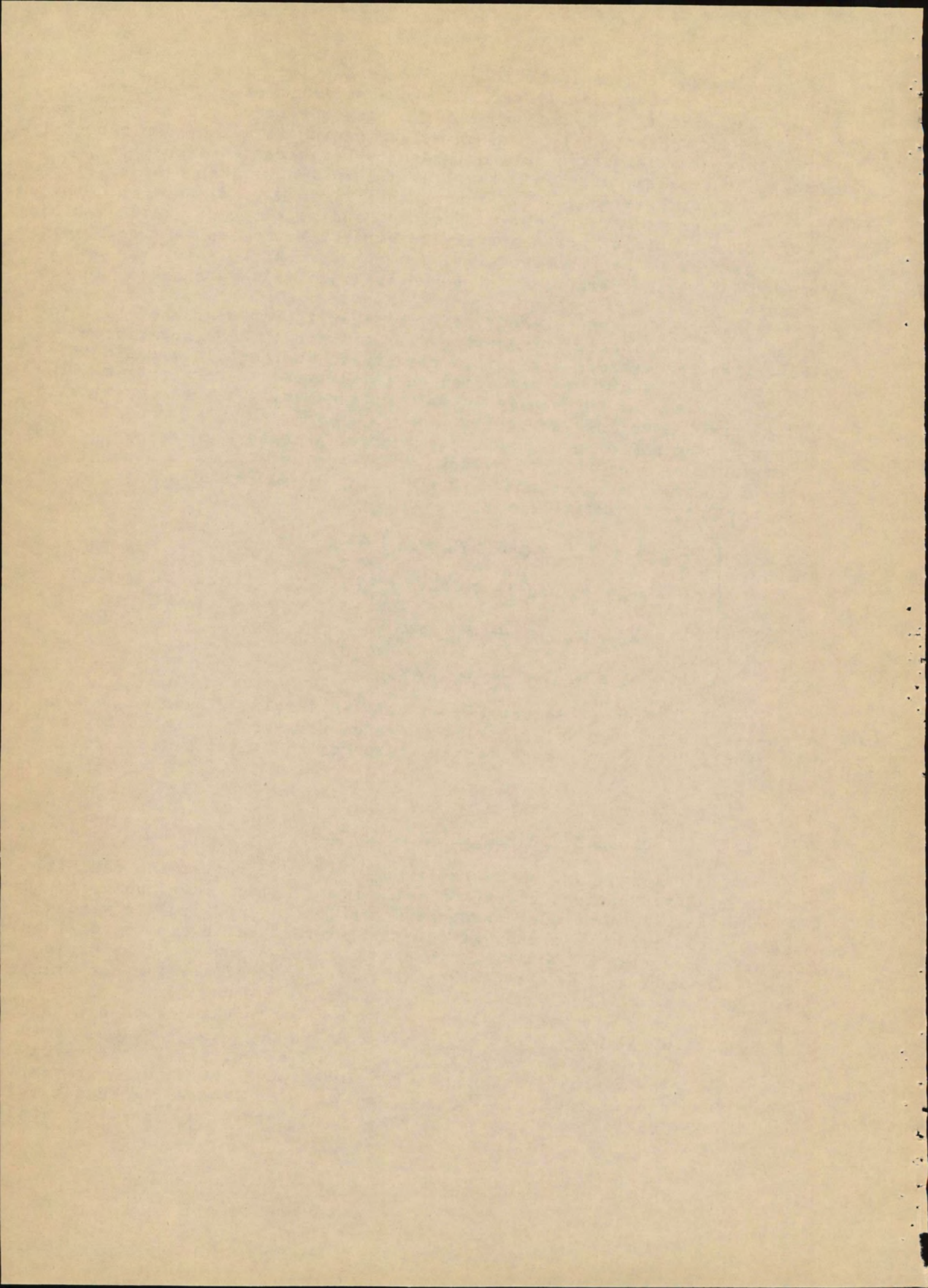
$$(25-1) \begin{cases} a) & k_n = k_{n-1} + (-i + \varphi_n w_{n-1}) \Delta z_n \\ b) & m_n = m_{n-1} + (j - \varphi_n v_{n-1}) \Delta z_n \\ c) & v_n = v_{n-1} + \frac{1}{\chi_n} k_{n-1} \Delta z_n \\ d) & w_n = w_{n-1} + \frac{1}{\chi_n} m_{n-1} \Delta z_n \end{cases}$$

De vergelijkingen (24-3) en (24-4) blijven dezelfde. Daar we nu een lineair stelsel van vergelijkingen hebben gekregen, is het oplossen aanzienlijk eenvoudiger en zonder bijzonder maatregelen uitvoerbaar geworden.

4c. Vaksgewijze vereenvoudigde integratie.

Het is bekend, dat het dwarsverhang vrij wat groeter is, dan het verhang, dat evenwicht zou maken met de gemiddelde middelpuntvliedende kracht. Het lijkt nu niet onmogelijk een goede benadering te vinden door de middelpuntvliedende kracht niet over de volle diepte te middelen maar op het gebied $0 < z < 1$ in enkele veenige vakken te verdeelen en in elk dier vakken het gemiddelde van de middelpuntvliedende kracht te nemen.

We gaan weer uit van (7-1) en beschouwen zoo'n vak, het n-de. Mogen k, m, u en w aan het begin van dat vak $k_{n-1}, m_{n-1}, u_{n-1}$ en w_{n-1} en aan het eind daarvan k_n, m_n, u_n en w_n zijn. Moge verder het gemiddelde van de grootheden u^2, uw, u en w in dat vak voorgesteld worden door $\bar{u}_n^2, \bar{u}w_n, \bar{u}_n$ en \bar{w}_n , dan kunnen we in dat vak een fictief dwarsverhang en een fictief langsverhang φ_n resp. χ_n bepalen uit:



$$(26-1) \begin{cases} a) & j_n = j - a \overline{u}_n + b \overline{u}_n \\ b) & i_n = i - a \overline{u}_n + b \overline{u}_n \end{cases}$$

we hebben dan als eerste stelsel vergelijkingen:

$$(26-2) \begin{cases} a) & k_n = k_{n-1} - i_n \Delta z_n \\ b) & m_n = m_{n-1} + j_n \Delta z_n \end{cases}$$

Verder is in het n-de vak:

$$(26-3) \begin{cases} a) & k = k_{n-1} + i_n (z_{n-1} - z) = i_n \left\{ \left(\frac{k_{n-1}}{i_n} + z_{n-1} \right) - z \right\} \\ b) & m = m_{n-1} + j_n (z - z_{n-1}) = j_n \left\{ z - \left(z_{n-1} - \frac{m_{n-1}}{j_n} \right) \right\} \end{cases}$$

Koemen we nu:

$$(26-4) \begin{cases} a) & k_n = \frac{k_{n-1}}{i_n} + z_{n-1} \\ b) & \mu_n = -\frac{m_{n-1}}{j_n} + z_{n-1} \end{cases}$$

dan is:

$$(26-5) \begin{cases} a) & k = i_n (k_n - z) \\ b) & m = j_n (z - \mu_n) \end{cases}$$

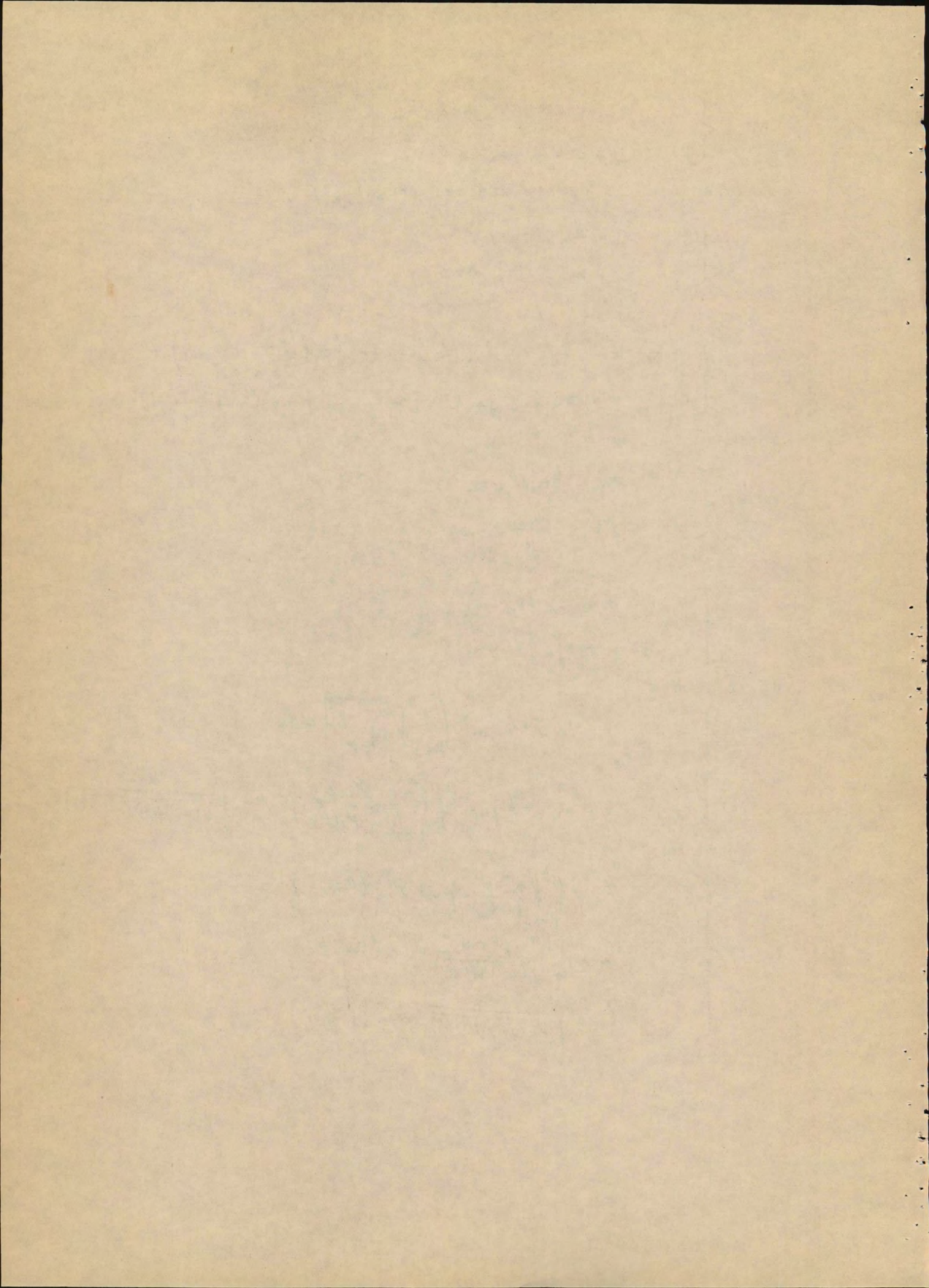
verder is dan:

$$(26-6) \begin{cases} a) & u = u_{n-1} + b i_n^{-1/2} \int_{p_{n-1}}^p \frac{\sqrt{k_n - p^6}}{1 - p^6} dp \\ b) & w = w_{n-1} + b j_n i_n^{-1/2} \left\{ \int_{p_{n-1}}^p \frac{p^6 dp}{\sqrt{(k_n - p^6)(1 - p^6)}} - \mu_n \int_{p_{n-1}}^p \frac{dp}{\sqrt{(u_n - p^6)(1 - p^6)}} \right\} \end{cases}$$

Koemen we nu:

$$(26-7) \begin{cases} a) & \phi_n = \int_{p_{n-1}}^p \frac{\sqrt{u_n - p^6}}{1 - p^6} dp = \phi_n(u_n, p) \\ b) & \psi_n = \int_{p_{n-1}}^p \frac{p^6 dp}{\sqrt{(k_n - p^6)(1 - p^6)}} = \psi_n(k_n, p) \\ c) & \chi_n = \int_{p_{n-1}}^p \frac{dp}{\sqrt{(u_n - p^6)(1 - p^6)}} = \chi_n(u_n, p) \end{cases}$$

en becalen we vervolgend:



(27-1) {

- a) $\tilde{\phi}_n = \phi_n(u_n, p_n) = \tilde{\phi}_n(k_n)$
- b) $\tilde{\psi}_n = \psi_n(u_n, p_n) = \tilde{\psi}_n(k_n)$
- c) $\tilde{\chi}_n = \chi_n(u_n, p_n) = \tilde{\chi}_n(k_n)$
- d) $\bar{\phi}_n = \frac{1}{\Delta z_n} \int_{z_{n-1}}^{z_n} \phi_n dz = \bar{\phi}_n(u_n)$
- e) $\bar{\psi}_n = \frac{1}{\Delta z_n} \int_{z_{n-1}}^{z_n} \psi_n dz = \bar{\psi}_n(u_n)$
- f) $\bar{\chi}_n = \frac{1}{\Delta z_n} \int_{z_{n-1}}^{z_n} \chi_n dz = \bar{\chi}_n(u_n)$
- g) $\bar{\phi}_n^2 = \frac{1}{\Delta z_n} \int_{z_{n-1}}^{z_n} \phi_n^2 dz = \bar{\phi}_n^2(u_n)$
- h) $\bar{\phi}\bar{\psi}_n = \frac{1}{\Delta z_n} \int_{z_{n-1}}^{z_n} \phi_n \psi_n dz = \bar{\phi}\bar{\psi}_n(u_n)$
- i) $\bar{\phi}\bar{\chi}_n = \frac{1}{\Delta z_n} \int_{z_{n-1}}^{z_n} \phi_n \chi_n dz = \bar{\phi}\bar{\chi}_n(u_n)$

den is:

(27-2) {

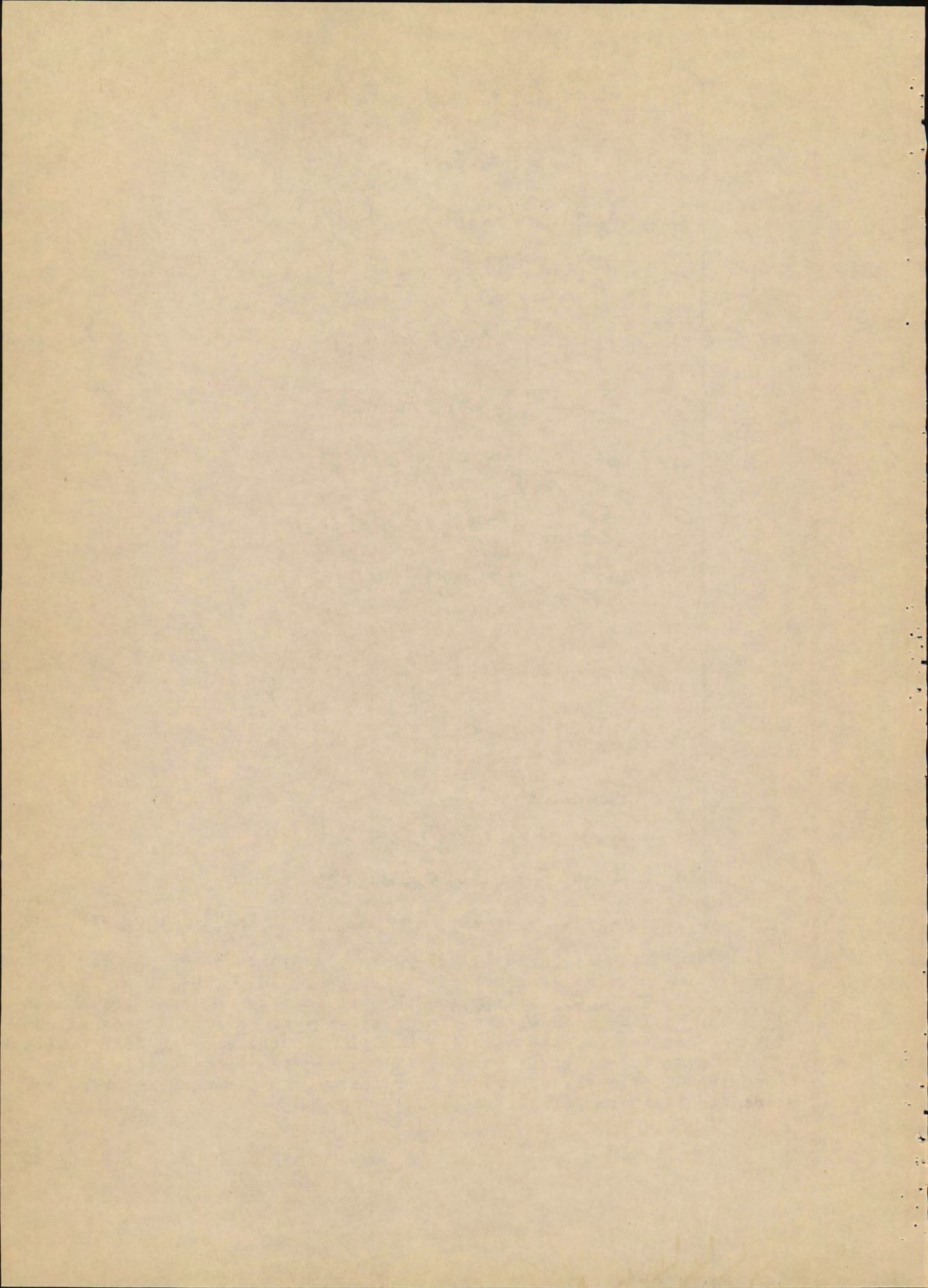
- a) $u_n = u_{n-1} + 6i\mu^{1/2} \tilde{\phi}_n$
- b) $w_n = w_{n-1} + 6j\mu^{1/2} i^{-1/2} \{ \tilde{\psi}_n - \mu_n \tilde{\chi}_n \}$

voorts is:

(27-3) {

- a) $\bar{u}_n = u_{n-1} + 6i\mu^{1/2} \bar{\phi}_n$
- b) $\bar{w}_n = w_{n-1} + 6j\mu^{1/2} i^{-1/2} \{ \bar{\psi}_n - \mu_n \bar{\chi}_n \}$
- c) $\bar{u}_n^2 = u_{n-1}^2 + 2u_{n-1} i\mu^{1/2} \bar{\phi}_n + 36i\mu \bar{\phi}_n^2$
- d) $\bar{u}\bar{w}_n = u_{n-1} w_{n-1} + 6w_{n-1} i\mu^{1/2} \bar{\phi}_n - 6u_{n-1} j\mu^{1/2} i^{-1/2} (\bar{\psi}_n - \mu_n \bar{\chi}_n) + 36j\mu^{1/2} \bar{\phi}_n \bar{\psi}_n + 36j\mu \bar{\phi}_n \bar{\chi}_n$

In (26-1), (26-2), (26-4), (27-2) en (27-3) hebben we per vak 12 vergelijkingen op de 12 grootheden $j\mu, i\mu, k_n, w_n, k_n, \mu_n, u_n, w_n, \bar{u}_n, \bar{w}_n, \bar{u}_n^2$ en $\bar{u}\bar{w}_n$ uit te drukken in de grootheden $k_{n-1}, w_{n-1}, u_{n-1}$ en w_{n-1} van het vorige vak. Daartoe moesten natuurlijk de functies ϕ_n tot en met ϕ_n als functie van k_n door numeriek of grafische integratie eens voor altijd van te voren bepaald zijn. We moeten nu natuurlijk ook nog weer toevoegen de randvoorwaarden en de continuïteitsvergelijkingen:



$$(28-1) \begin{cases} a) & u_0 = 0 \\ b) & w_0 = 0 \\ c) & k_N = 0 \\ d) & m_N = 0 \end{cases}$$

$$(28-2) \begin{cases} a) & \bar{u}_1 \Delta z_1 + \bar{u}_2 \Delta z_2 + \dots + \bar{u}_N \Delta z_N = 1 \\ b) & \bar{w}_1 \Delta z_1 + \dots + \bar{w}_N \Delta z_N = 0 \end{cases}$$

Hierna staan we weer voor de niet eenvoudige taak dit stelsel algebraïsche vergelijkingen op te lossen.

Tegenover de voorgaande methode heeft deze waarschijnlijk het voordeel van het beduidend minder vakken toe te koven. Daar staat echter tegenover, dat er per vak meer ontekenden zijn en dat voor f de integraties (26-7) en (28-1d-i) uitgevoerd moeten zijn.

5. Slotbeschouwing.

5a. Wiskundig.

De methode der opeenvolgende benaderingen zou zeker te verkiezen zijn, als de snelheidsverdeling van de langssnelheid weinig door de spiraalstroom beïnvloed werd. Zoals op blz. 16 betoogd is, is dat niet het geval en daarsa mag de methode van par. 2b wel als getrand beschouwd worden.

De methode van een vereenvoudigde vergelijking is ontoereikend, zoals op blz. 21 betoogd is, omdat de verdelingsfunctie α zoo veranderlijk is.

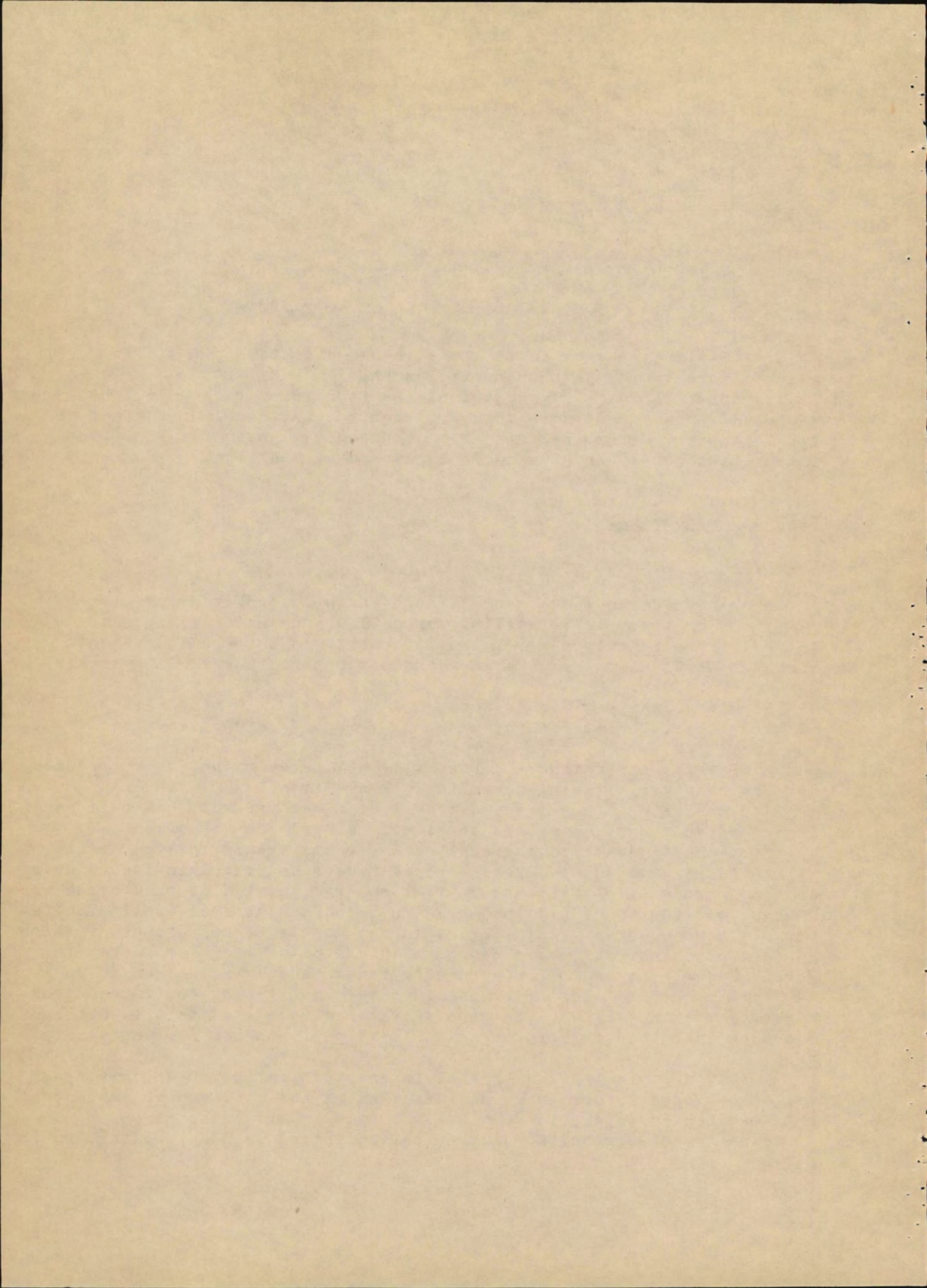
De algebraïsche methoden hebben alle het bezwaar, dat de optredende algebraïsche vergelijkingen zoo ingewikkeld zijn.

Alvorens de weg te wijzen, die naar mijn meening voor het oplossen te verkiezen zou zijn, wil ik eerst nog het volgende opmerken:

Afgezien van de Corioliskracht, die slechts weinig invloed heeft, wordt de spiraalstrooming geheel bepaald door en gekarakteriseerd door de ene parameter a . Inmers voor alle gevallen zijn de randvoorwaarden steeds dezelfde en de grootheden l en j hangen door de continuïteitsvergelijkingen ook af van a . Het is dus mogelijk, nog steeds afgezien van de Corioliskracht, voor een bepaald aantal waarden van a van te voren l , m , v en w als functie van z en de waarde van i en j te bepalen en dit alles bijv. in een tabel vast te leggen. In een voorkomend geval kan men dan die ééne karakteristieke grootheid a uitrekenen en door interpolatie in de tabel alle grootheden zeer eenvoudig bepalen.

De methode, die ik nu voor stel is een combinatie van de drie typen van oplossingsmethode. In de hoofdtrekken is het een methode van opeenvolgende benaderingen, in de details treden andere methoden op.

We nemen het stelsel (6-3). Een periode (stel de n -de) bestaat nu



daarin, dat we met de uitkomsten voor y en w van de voorafgaande periode (de $(n-1)$ -de), zijnde v_{n-1} en w_{n-1} de functies:

$$(23-1) \begin{cases} a) & p_n = a v_{n-1} \\ b) & \gamma_n = (1-z)z^{1/3} \left| \left\{ \left(\frac{dv_{n-1}}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dw_{n-1}}{dz} \right)^2 \right\}^{1/2} \right| \end{cases}$$

berekenen. We hebben dan in de n -de periode op te lossen het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$(23-2) \begin{cases} a) & l'_n = -i_n + p_n w_n \\ b) & m'_n = j_n - p_n v_n \\ c) & l_n = \gamma_n w'_n \\ d) & m_n = \gamma_n w'_n \end{cases}$$

met de randvoorwaarden:

$$(23-3) \begin{cases} a) & \text{Voor } z = 0 \text{ is } v_n = 0 \\ b) & \text{,, } \text{,, } \text{,, } w_n = 0 \\ c) & \text{,, } z = 1 \text{ ,, } l_n = 0 \\ d) & \text{,, } \text{,, } \text{,, } m_n = 0 \end{cases}$$

en de continuïteitsvergelijkingen:

$$(23-4) \begin{cases} a) & \int_0^1 v_n dz = 1 \\ b) & \int_0^1 w_n dz = 0 \end{cases}$$

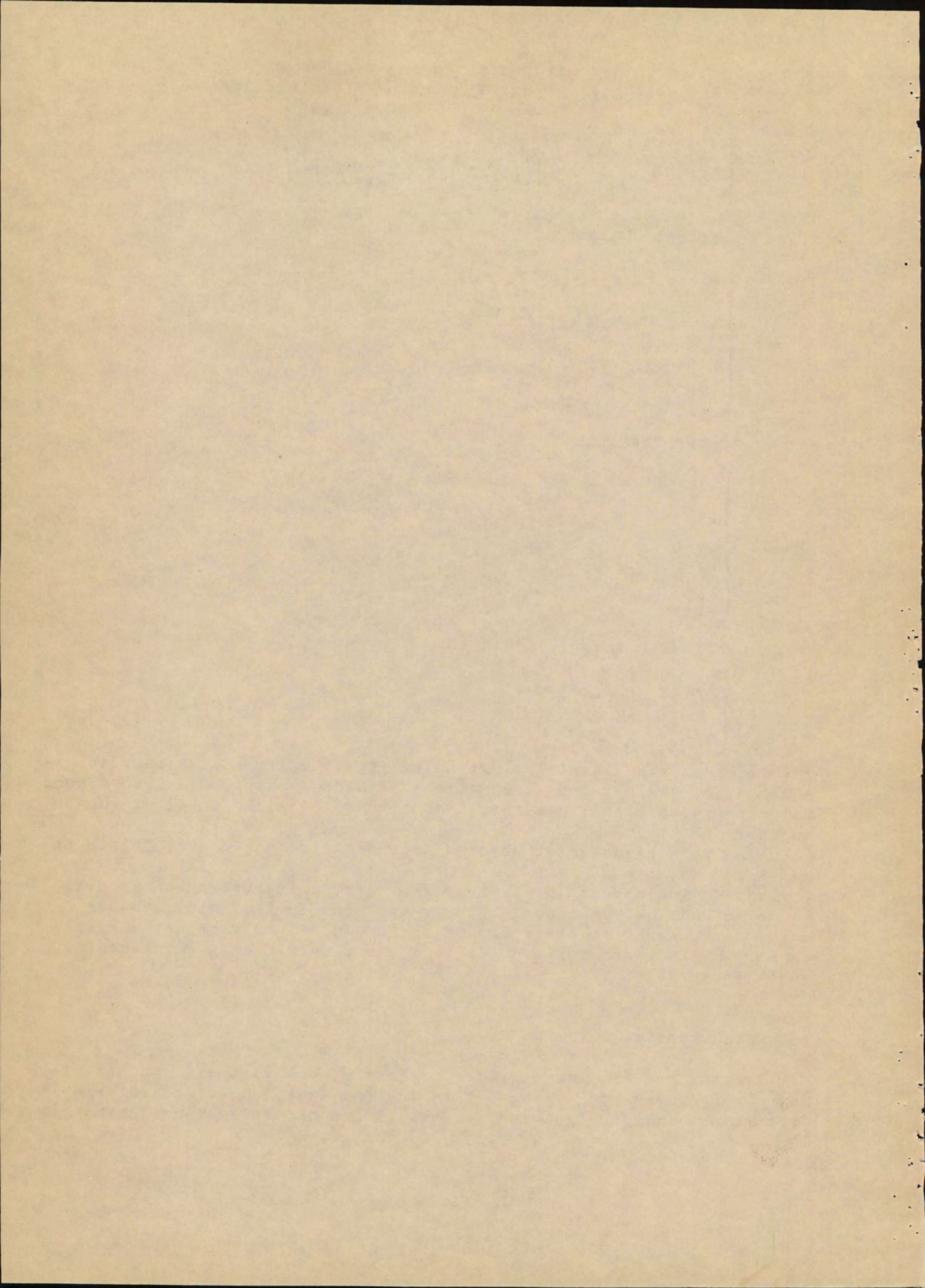
Het oplossen van dit stelsel geschiedt op de wijze als in par. 4b geschetst is, dus met een algebraïsche methode, waarbij de algebraïsche vergelijkingen alle lineair zijn en zonder proberen opgelost kunnen worden.

De nulde periode wordt gevormd door de methode van par. 3b toe te passen.

Daar de invloed van de parameter b gering is, betrekken we deze in de methode door een correctie er voor te bepalen, die gevonden wordt door, nadat we een oplossing gevonden hebben voor het stelsel zonder b , nog één periode toe te voegen, waarin met b rekening gehouden wordt.

3b. Natuurkundig.

Alvorens het vrij eevangrijke rekenwerk, dat vast zit aan het hierboven aangegeven programma, uit te voeren, moet, dunkt me, wel redelijk vast staan, dat de afgeleide vergelijkingen het verschijnsel behoorlijk



weergeven. Misschien is het zelfs dan beter het vraagstuk half experimenteel op te lossen, door voor een aantal waarden van a in de praktijk alle grootheden te bepalen.

Allereerst is er natuurlijk de kritiek, dat de snelheidsverdeling op verschillende punten van de Y-as verschillend zal zijn, doordat de diepte van de binnenbocht naar de buitenbocht toeneemt en ook de gemiddelde snelheid wel zal veranderen. Er zal dus in het algemeen ook een dwarsgradiënt van de snelheid zijn, die ook tot een kracht aanleiding geeft.

Daarnaast is er nog kritiek, die voortvloeit uit de resultaten der voorafgaande beschouwingen. Deze kritiek is gericht op de verdeelingsfunctie $\alpha = (1-2)z^{\frac{2}{3}}$. Ik weet te begrijpen, dat deze functie uitsluitend is opgesteld om de in rechte rivierstukken empirisch gevonden zesdegraadsparabolische snelheidsverdeling te verklaren. Als dat zoo is, moet ernstig betwijfeld worden, of die functie α ook dezelfde vorm heeft, als spiraalstrooming optreedt en wel:

1e omdat volgens het betoog van blz. 16 een belangrijk afwijkende snelheidsverdeling verwacht mag worden.

2e omdat volgens het betoog van blz. 21 een snelheidsinversie van de snelheidsgradiënt verwacht mag worden.

Deze twijfel lijkt me wel gerechtvaardigd, omdat de gegeven vorm van de α -functie, naar ik uit blz. 2 der nota opraak, niet theoretisch gefundeerd is. En voorts meen ik, dat ook de zesdegraadsparabool niet zoo geheel vast ligt. Ik weet dat op uit een publicatie van de Rijkswaterstaat, Studiedienst Venedenrivieren, waarin de snelheidsverdeling in zeestroom en rivieren benaderd wordt met hoogergraadsparabolen, waarvan de graad, naar ik me meen te herinneren, tusschen 5 en 9 bleek te liggen.

In verband hiermee wil ik er nog even op wijzen, dat ook in rechte rivierstukken spiraalstrooming zal optreden en wel onder invloed van de Corioliskracht. Deze is wel veel geringer dan in bochten de spiraalstrooming onder invloed van de middelpuntvliedende kracht, maar om de gedachten te bepalen: bij 5 m diepte, 1m/sec gemiddelde snelheid, en een waarde van ϵ van 4 cm is b ongeveer 0,3 en daar q_s ongeveer 0,8 is, mogen we een correctie op v van ongeveer 7% verwachten. Deze getallen zijn vrij betrouwbaar, daar in een recht stuk $a=0$ is en dus alleen een storing van de langssnelheid door de Corioliskracht veroorzaakt wordt en die is, blijkens bovenstaande getallen zoo klein, dat de veronderstelling van blz. 3, waarmee de methode van par. 2b staat en valt, hier wel gerechtigd is. De correctie is intusschen wel zoo groot, dat hij in sommige gevallen niet buiten beschouwing mag blijven. Men zal dan op grond van de zesdegraadsparabool misschien ook tot een iets andere α -functie moeten besluiten.

Het lijkt mij wel gewenscht de α -functie aan metingen in de praktijk te controleeren. Het is hiervoor niet noodzakelijk langs- en dwars-snelheid beide te kennen. Als de langssnelheid, de beide verhangen en de straal van de bocht bekend zijn, kan uit (7-1b) m bepaald worden. We hebben daarna (7-1a) en (7-1d) ter bepaling van l en w :

$$(30-1) \begin{cases} a) & l \frac{dw}{dz} = m \frac{dv}{dz} \\ b) & \frac{dl}{dz} = -i + (av - b)w \end{cases}$$

Wanneer we eerst in (30-1a): $l = i(1-z)$, een benadering voor w , waarmee we uit (30-1b) weer een waarde van l vinden. Zoo doorgaande hebben we na eenige perioden een voldoende benadering voor w en l verkregen en dan volgt uit:

$$(31-1) \quad k = \sqrt{l^2 + m^2} = \left\{ \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \right\} \alpha(z)$$

de functie $\alpha(z)$.

Als we een zij het ook ruwe meting van w ter beschikking hebben, kunnen we bij het oplossen van (30-1) natuurlijk daarvan uitgaan en op het rekenwerk besparen.

6. Aanhangsel.

6a. Afleiding van eenige integralen.

We gaan uit van de volgende drie grondintegralen (integratieconstanten worden geskshelve weggelaten):

$$(31-2) \quad \int p^n dp = \frac{1}{n+1} p^{n+1}$$

$$(31-3) \quad \int \frac{dp}{p} = \ln p$$

$$(31-4) \quad \int \frac{dp}{1+p^2} = \text{bgtang} p$$

en we leiden nu de volgende hulpsformules af:

$$(31-5) \quad \begin{cases} a) \int \frac{dp}{1-p} = - \int \frac{d(1-p)}{1-p} = - \ln(1-p) \\ b) \int \frac{dp}{1+p} = \int \frac{d(1+p)}{1+p} = \ln(1+p) \end{cases}$$

$$(31-6) \quad \int \frac{dp}{1-p^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dp}{1-p} + \frac{1}{2} \int \frac{dp}{1+p} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+p}{1-p}$$

Nu is:

$$(31-7) \quad \int \frac{dp}{1 \pm p + p^2} = \pm \int \frac{d(\frac{1}{2} \pm p)}{\frac{3}{4} + (\frac{1}{2} \pm p)^2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} (\frac{1}{2} \pm p) \right\}}{1 + \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} (\frac{1}{2} \pm p) \right\}^2}$$

en dus:

$$(31-8) \quad \begin{cases} a) \int \frac{dp}{1+p+p^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{bgtang} \frac{2}{\sqrt{3}} (\frac{1}{2} + p) \\ b) \int \frac{dp}{1-p+p^2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{bgtang} \frac{2}{\sqrt{3}} (\frac{1}{2} - p) \end{cases}$$

Voorts is:

$$(32-1) \quad a) \int \frac{1/2 + p}{1+p+p^2} dp = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+p+p^2)}{1+p+p^2} = \frac{1}{2} \ln(1+p+p^2)$$

$$b) \int \frac{1/2 - p}{1-p+p^2} dp = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-p+p^2)}{1-p+p^2} = -\frac{1}{2} \ln(1-p+p^2)$$

Met behulp van deze integralen gaan we nu eerst E_1 bepalen:
Nu is:

$$(32-2) \quad \frac{1-p^6}{1-p^6} = p^2 + \frac{1-p^2}{1-p^6} = p^2 + \frac{1}{1+p^2+p^4}$$

We hebben dus:

$$(32-3) \quad E_1 = 2\gamma \int_0^p p^2 dp + 2\gamma \int_0^p \frac{dp}{1+p^2+p^4}$$

Verder is:

$$(32-4) \quad \frac{1}{1+p^2+p^4} = \frac{1}{2} \frac{1+p}{1+p+p^2} + \frac{1}{2} \frac{1-p}{1-p+p^2}$$

Dus:

$$(32-5) \quad E_1 = 9p^3 + \frac{2\gamma}{2} \int_0^p \frac{1+p}{1+p+p^2} dp + \frac{2\gamma}{2} \int_0^p \frac{1-p}{1-p+p^2} dp$$

Nu is:

$$(32-6) \quad \frac{1+p}{1+p+p^2} = \frac{1/2}{1+p+p^2} + \frac{1/2 + p}{1+p+p^2}$$

en dus:

$$(32-7) \quad \int_0^p \frac{1+p}{1+p+p^2} dp = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + p\right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln(1+p+p^2)$$

evenzoo:

$$(32-8) \quad \int_0^p \frac{1-p}{1-p+p^2} dp = -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} - p\right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln(1-p+p^2)$$

Dus:

$$(32-9) \quad E_1 = 9p^3 + \frac{9}{2} \sqrt{3} \left\{ \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + p\right) - \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} - p\right) \right\} + \frac{2\gamma}{4} \left\{ \ln(1+p+p^2) - \ln(1-p+p^2) \right\}$$

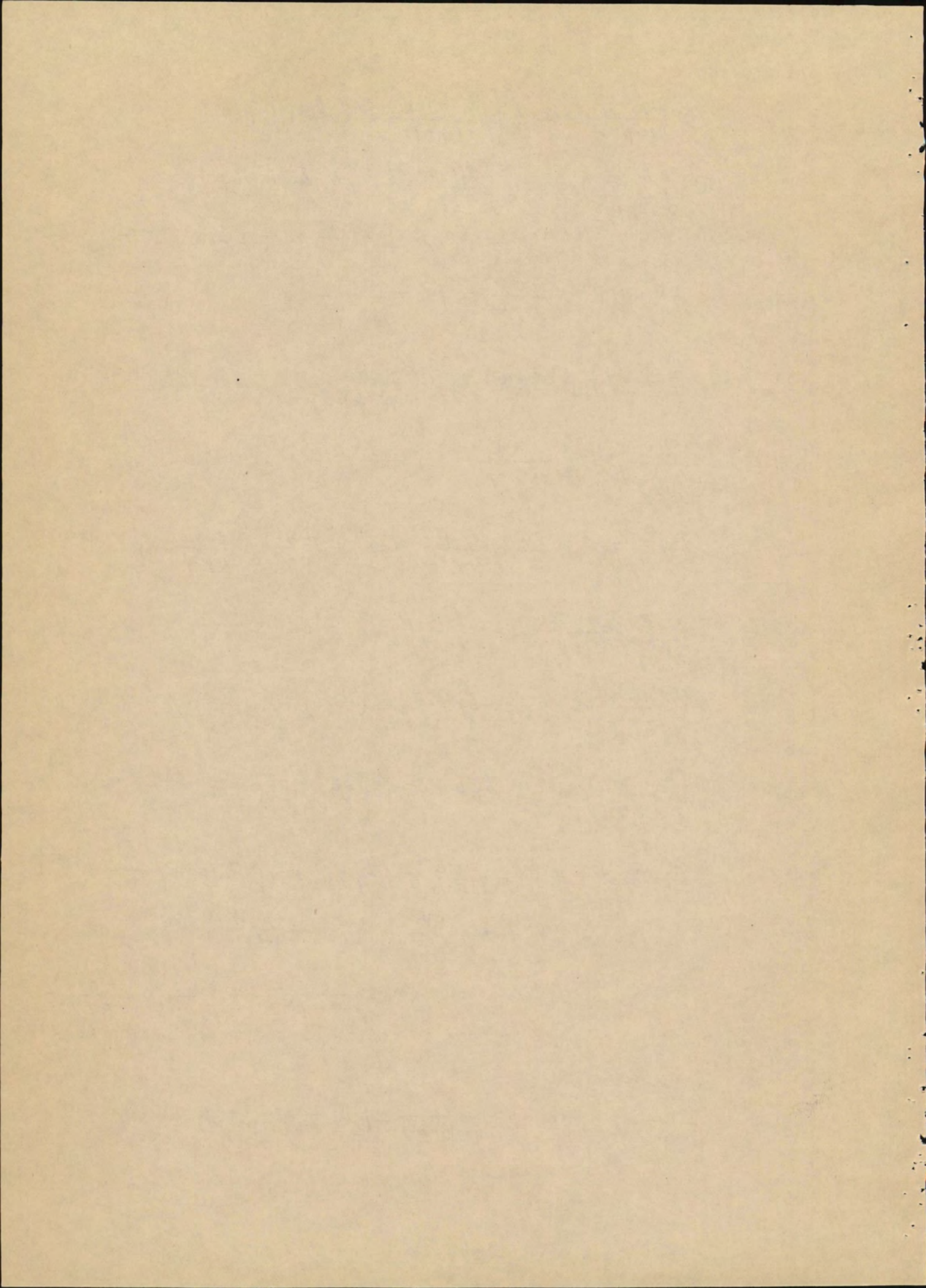
$$= 9p^3 + \frac{9}{2} \sqrt{3} \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{p\sqrt{3}}{1-p^2} + \frac{2\gamma}{4} \ln \frac{1+p+p^2}{1-p+p^2}$$

$$= 9,00 p^3 + 0,1360 \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{1,732 p}{1-p^2} + 6,75 \ln \frac{1+p+p^2}{1-p+p^2}$$

Met $\operatorname{tg} \operatorname{tg}$ wordt bedoeld de hoek in graden uitgedrukt, waarvan de achterstaande uitdrukking de tg is.

Vervolgens E_2 :

$$(32-10) \quad \frac{1-p^7}{1-p^6} = p + \frac{1-p}{1-p^6} = p + \frac{1-p^2}{(1+p)(1-p^6)} = p + \frac{1}{(1+p)(1+p^2+p^4)}$$



en nu is:

$$(33-1) \quad \frac{1}{(1+p)(1+p^2+p^4)} = \frac{1/3}{1+p} + \frac{1/2}{1+p+p^2} + \frac{1/6 - 1/3p}{1-p+p^2}$$

Dus:

$$(33-2) \quad E_2 = -\frac{36}{7} \int_0^p p dp - \frac{12}{7} \int_0^p \frac{dp}{1+p} - \frac{18}{7} \int_0^p \frac{dp}{1+p+p^2} - \frac{12}{7} \int_0^p \frac{1/2 - p}{1-p+p^2} dp$$

$$= -\frac{18}{7} p^2 - \frac{12}{7} \ln(1+p) - \frac{12\sqrt{3}}{7} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + p\right) + \frac{2\sqrt{3}}{7} + \frac{6}{7} \ln(1-p+p^2)$$

$$= 1,56 - 2,57 p^2 - 0,0519 \operatorname{arctg} 1,155 \left(\frac{1}{2} + p\right) - 0,86 \ln \frac{1+2p+p^2}{1-p+p^2}$$

Nu F_1 :

$$(33-3) \quad \frac{1-p^8}{1-p^6} p^7 = \left(p^2 + \frac{1-p^2}{1-p^6}\right) p^7 = p^9 + \frac{p^7 - p^9}{1-p^6}$$

$$= p^9 + p^3 - p + \frac{p-p^3}{1-p^6}$$

$$= p^9 + p^3 - p + \frac{p}{1+p^2+p^4}$$

Dus:

$$(33-4) \quad \int_1^p \frac{1-p^8}{1-p^6} p^7 dp = \int_1^p p^9 dp + \int_1^p p^3 dp - \int_1^p p dp + \int_1^p \frac{p dp}{1+p^2+p^4}$$

$$= \frac{1}{10} (p^{10} - 1) + \frac{1}{4} (p^4 - 1) - \frac{1}{2} (p^2 - 1) + \frac{1}{2} \int_1^p \frac{d(p^2)}{(1+p^2)(p^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{10} (1-p^9) - \frac{1}{4} (1-p^4) + \frac{1}{2} (1-p^2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + p^2\right) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Voorts is:

$$(33-5) \quad E_1^1 = 9 + \frac{9}{2} \sqrt{3} \frac{\pi}{2} + \frac{27}{4} \ln 3 = 28,66$$

Dus:

$$(33-6) \quad F_1 = 5,14 p^7 E_1^1 + 13,89 (1-p^{10}) + 34,71 (1-p^4) - 69,43 (1-p^2) - 1,992 \operatorname{arctg} 1,1547 \left(\frac{1}{2} + p^2\right) - 63,44$$

Vervolgens hebben we voor F_2 :

$$(33-7) \quad \frac{1-p^7}{1-p^6} p^7 = \left(p + \frac{1-p}{1-p^6}\right) p^7 = p^8 + \frac{p^7 - p^8}{1-p^6}$$

$$\begin{aligned}
 (34-1) \quad \frac{1-p^7}{1-p^6} p^7 &= p^8 + p^2 - p + \frac{p}{(1+p)(1+p^2+p^4)} \\
 &= p^8 + p^2 - p + \frac{-\frac{1}{3}}{1+p} + \frac{\frac{1}{2}p}{1+p+p^2} + \frac{1}{6} \frac{2-p}{1-p+p^2} \\
 &= p^8 + p^2 - p - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1+p}{1+p+p^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{1+p+p^2} + \frac{1}{6} \frac{1-p}{1-p+p^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-p+p^2}
 \end{aligned}$$

Dus:

$$\begin{aligned}
 (34-2) \quad \int_1^p \frac{1-p^7}{1-p^6} p^7 dp &= \frac{1}{9}(p^9-1) + \frac{1}{3}(p^3-1) - \frac{1}{2}(p^2-1) - \frac{1}{3} \ln(1+p) + \frac{1}{4} \ln(1+p+p^2) - \frac{1}{2} \ln(1-p+p^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2\sqrt{3}} \left\{ \ln \sqrt[3]{\frac{1}{2}+p} + \ln \sqrt[3]{\frac{1}{2}-p} \right\} + \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{\pi}{12\sqrt{3}} \\
 &= -\frac{1}{9}(1-p^9) - \frac{1}{3}(1-p^3) + \frac{1}{2}(1-p^2) + \frac{1}{12} \left\{ \ln \frac{1+p+p^2}{1-p+p^2} + 2 \ln \frac{1+p+p^2}{1+2p+p^2} \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{1+2p^2}} + \frac{\pi}{12\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

Verder is:

$$(34-3) \quad \frac{1-p^8}{1-p^6} p^6 = \frac{1-p^8}{1-p^6} (p^6-1) + \frac{1-p^8}{1-p^6} = p^2-1 + \frac{1-p^8}{1-p^6}$$

dus:

$$(34-4) \quad \int_1^p \frac{1-p^8}{1-p^6} p^6 dp = -\frac{1}{9}(1-p^9) + (1-p) + \frac{1}{2} \gamma (E_1 - E_1^1)$$

Voorts is:

$$(34-5) \quad E_2^1 = -\frac{18}{7} - \frac{12}{7} \ln 2 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{7} = -5,31$$

en dus is:

$$\begin{aligned}
 (34-6) \quad F_2 &= 5,14 p^7 E_2 + (1-p^6) E_1 - 5,94 (1-p^9) \\
 &\quad - 8,82 (1-p^3) + 13,22 (1-p^2) + 27,00 (1-p) \\
 &\quad - 0,1333 \ln \frac{0,8660}{\frac{1}{2}+p^2} + 6,61 \ln \frac{1+p+p^2}{1-p+p^2} \\
 &\quad - 4,41 \ln \frac{1+2p+p^2}{1-p+p^2} + 31,33
 \end{aligned}$$

En nu berekenen we F_3 :

$$(34-7) \quad \frac{1-p^7}{1-p^6} p^6 = \frac{1-p^7}{1-p^6} (p^6-1) + \frac{1-p^7}{1-p^6} = p-1 + \frac{1-p^7}{1-p^6}$$

$$(35-1) \int_1^p \frac{1-p^y}{1-p^6} p^6 dp = -\frac{1}{8}(1-p^8) + (1-p) + \frac{7}{36}(E_2^1 - E_2)$$

Dus:

$$(35-2) F_3 = (1-p^6)E_2 + 0,64(1-p^8) - 0,14(1-p)$$

ten slotte zullen we nog de integralen E_1^S en E_2^S bepalen:
 We passen partiële integratie toe:

$$(35-3) E_1^S = \int_0^1 E_1 dz = \int_0^1 E_1 z - \int_0^1 z dE_1 = E_1^1 - \int_0^1 p^{6z} 27 \frac{1-p^8}{1-p^6} dp$$

Nu is:

$$(35-4) p^6 \frac{1-p^8}{1-p^6} = (p^6-1) \frac{1-p^8}{1-p^6} + \frac{1-p^8}{1-p^6} = p^8 - 1 + \frac{1-p^8}{1-p^6}$$

Dus:

$$(35-5) E_1^S = E_1^1 - 27 \int_0^1 (p^8 - 1) dp - 27 \int_0^1 \frac{1-p^8}{1-p^6} dp$$

$$= E_1^1 - 27 \left(\frac{1}{9} - 1 \right) - E_1^1 = 24,00$$

Evenzoo: E_2^S :

$$(35-6) E_2^S = \int_0^1 E_2 dz = \int_0^1 E_2 z - \int_0^1 z dE_2 = E_2^1 - \int_0^1 p^6 \left(\frac{-36}{7} \right) \frac{1-p^y}{1-p^6} dp$$

nu is:

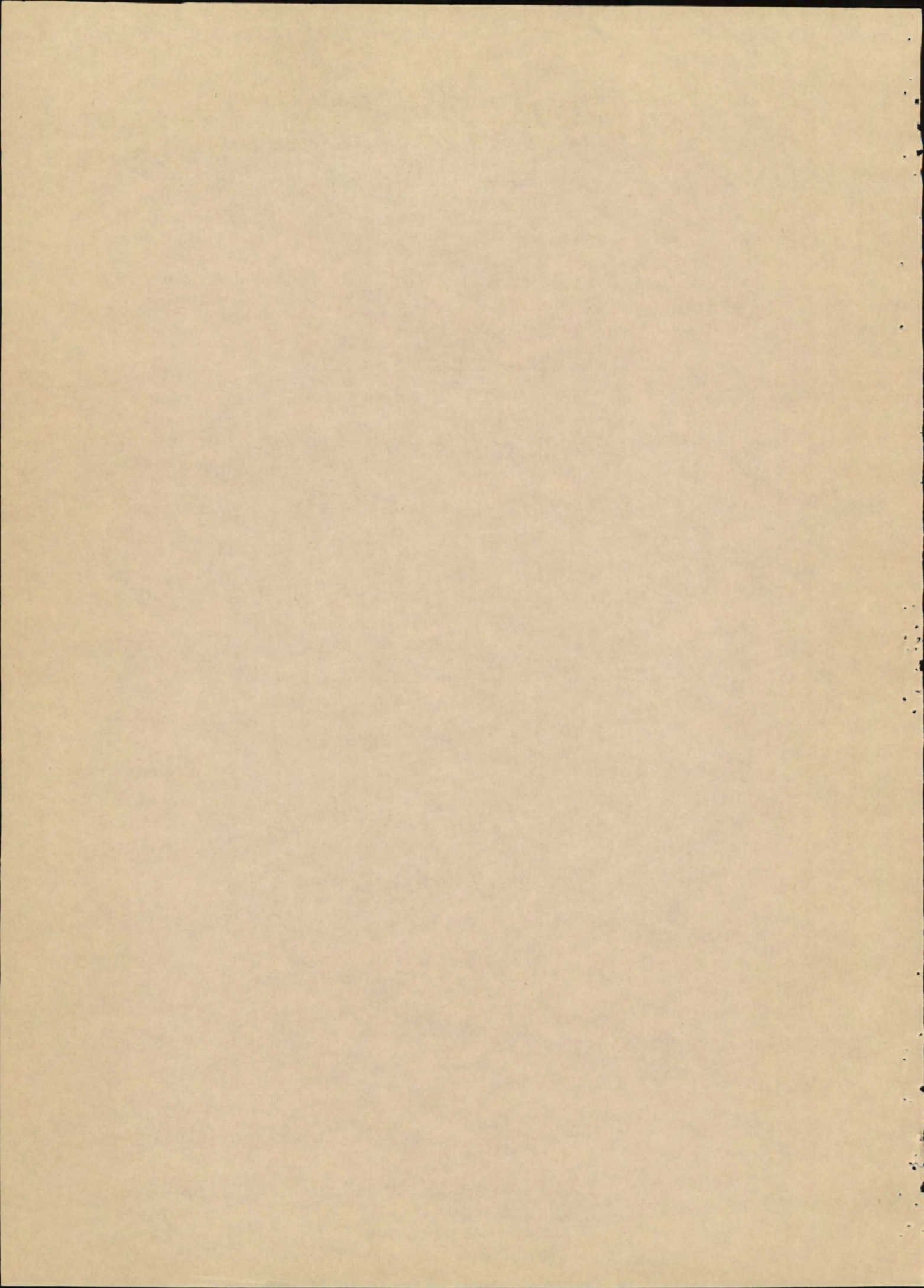
$$(35-7) p^6 \frac{1-p^y}{1-p^6} = (p^6-1) \frac{1-p^y}{1-p^6} + \frac{1-p^y}{1-p^6}$$

$$= p^y - 1 + \frac{1-p^y}{1-p^6}$$

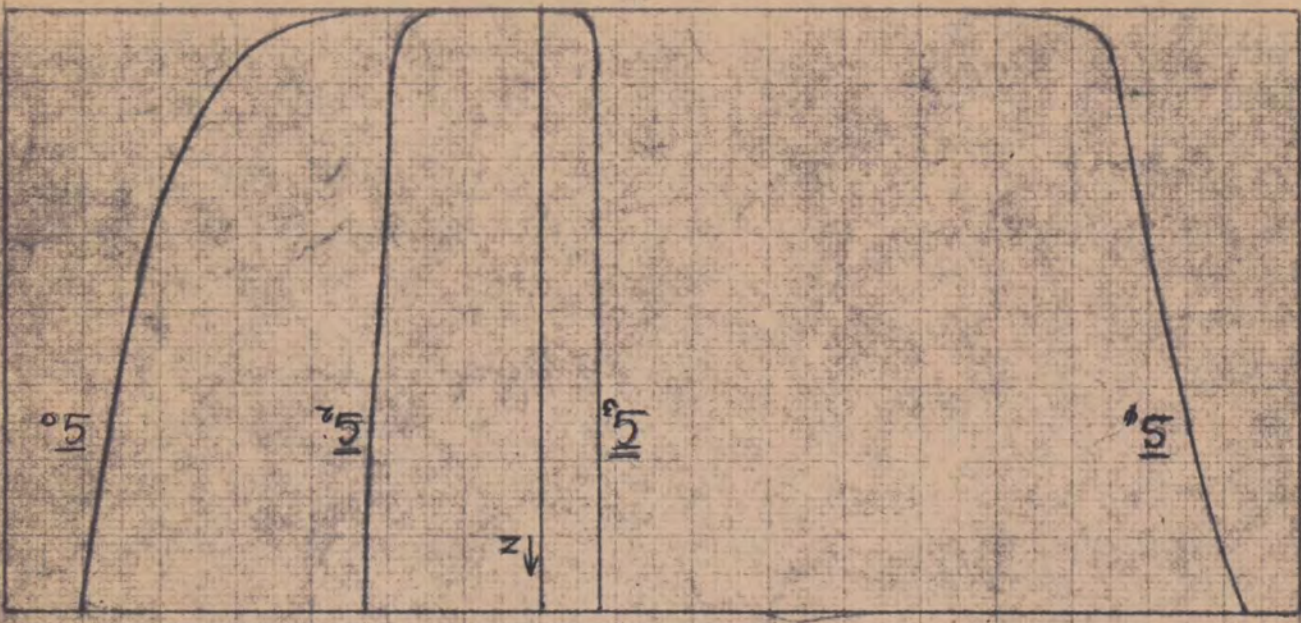
en dus:

$$(35-8) E_2^S = E_2^1 + \frac{36}{7} \int_0^1 (p^y - 1) dp + \frac{36}{7} \int_0^1 \frac{1-p^y}{1-p^6} dp$$

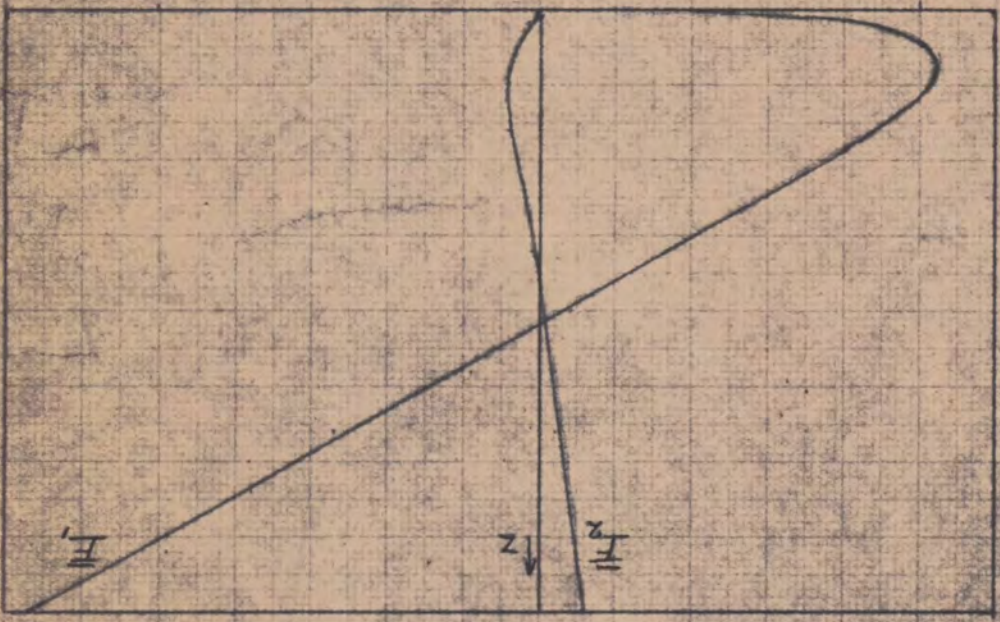
$$= E_2^1 + \frac{36}{7} \left(\frac{1}{8} - 1 \right) - E_2^1 = -4,50$$



5 0 5 0



0.5 0 -0.5



2 1 0 1

