

DOWT-w-519

DYNAMISCHE VERSCHIJNSELEN ALS
GEVOLG VAN GOLFAANVAL OP DE
HARINGVLIETSLUIZEN.

Beh. bij W-519

Samenvatting.

Met het doel enig inzicht te verkrijgen in de spanningsverdelingen die door golfaanval in de Haringvlietsluizen kunnen worden opgewekt, worden in dit rapport formules ontwikkeld, die de vormveranderingen van een op twee steunpunten opgelegde balk onder invloed van verschillende dynamische belastingen beschrijven. Nadat in de eerste paragrafen een gemakkelijk op te lossen bewegingsvergelijking is afgeleid, worden achtereenvolgens een periodieke en twee impulsieve belastingvormen in beschouwing genomen. Uit de resultaten blijkt, dat voor de Haringvlietsluizen:

- a. het resonantieverschijnsel uit een oogpunt van golfaanval geen noemenswaardige rol speelt, omdat de grootste periode van de eigen trilling kleiner is dan $1/5$ seconde ($T < \frac{1}{5} \text{ sec.}$)
- b. een impulsieve belasting slechts "statisch" in rekening mag worden gebracht, indien daarbij een doelmatige stootcoëfficiënt wordt ingevoerd. Deze stootcoëfficiënt kan met behulp van de in dit rapport ontwikkelde formules voor verschillende gevallen worden berekend. Afhankelijk van de tijdsduur van de belasting, kan zij variëren van 0 tot 2.

Uit de eerdergenoemde bewegingsvergelijking kunnen ook de eisen worden afgeleid, waaraan bij het modelonderzoek, zoals dit thans wordt uitgevoerd, moet worden voldaan. In een aanhangsel dat door de desbetreffende ingenieur van het Waterloopkundig Laboratorium werd geschreven, wordt dit nader toegelicht.

Dynamische verschijnselen als gevolg van golfaanval op de
Haringvlietsluizen.

1. Algemeen.

Over de uitwendig aangrijpende krachten die door golven op constructies aan zee kunnen worden uitgeoefend, is nog betrekkelijk weinig bekend. Uit de schaarse gegevens, die hierover ter beschikking staan, kan echter wel worden afgeleid, dat deze krachten onder bepaalde omstandigheden een geheel ander karakter kunnen hebben, dan men op grond van de karakteristieke eigenschappen van de aankomende golf zou verwachten. Zo kunnen bijvoorbeeld door brekingsverschijnselen zeer hoge doch kort durende drukstoten ontstaan, die voor de constructie een totaal andere belasting vormen dan die van de niet brekende golf.

Dergelijke drukstoten kunnen mogelijk ook ontstaan, indien - zoals in het onderhavige geval - de vorm van de constructie zodanig is gekozen, dat bepaalde vlakken hiervan evenwijdig zijn met het voorvlak van de naderende golf*) (zie fig. 1 pag. 2). Door een bepaalde aankomende golf kunnen dus onder verschillende omstandigheden sterk uiteenlopende belastingen worden opgewekt. Zo zal bijvoorbeeld een volkomen regelmatig sinussoëdaal golfpatroon (in zee) op een verticale wand (aan de kust) zowel de in fig. 2 als de in fig. 3 geschetste belastingen kunnen veroorzaken.

In beide gevallen heeft de belasting een dynamisch karakter, waardoor de constructie in trilling wordt gebracht. Deze trilling, die uiteindelijk de vormveranderingen en daarmee de spanningsverdeling in de constructie bepaalt, zal echter voor de beide belastingvormen niet dezelfde zijn.

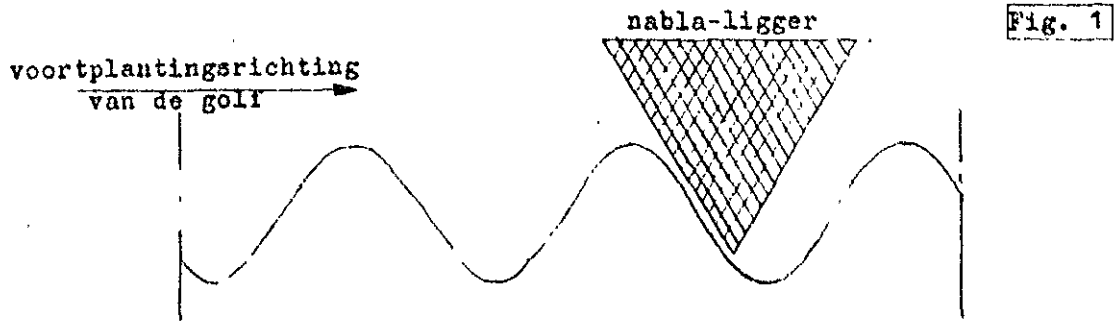
In het eerste geval (fig. 2) heeft men te doen met een betrekkelijk geleidelijke toe- en afname van de belasting met de tijd. Zoals later nog zal blijken, spelen de traagheidskrachten dan een geringe rol zolang de hoekfrequentie ω , ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) van het belastingverloop zeer veel kleiner is dan de kleinste hoekfrequentie ω_1 van de z.g. eigen trilling van de constructie.

Het 2e belastinggeval (fig. 3) heeft daarentegen een min of meer impulsief karakter, waardoor juist de traagheidskrachten het verschijnsel zullen gaan beheersen. De belasting grijpt vrijwel ogenblikkelijk aan en is weer gereduceerd tot nul, voordat de constructie een noemenswaardige vormverandering heeft kunnen ondergaan. Bij het einde van de belasting heeft ieder deel van de constructie dus nog slechts een geringe uitwijking, doch wel een snelheid. De uiteindelijke spanningsverdeling wordt in dat geval derhalve bepaald door de mate, waarin de constructie onder de invloed van de traagheidskrachten zal "doorschieten".

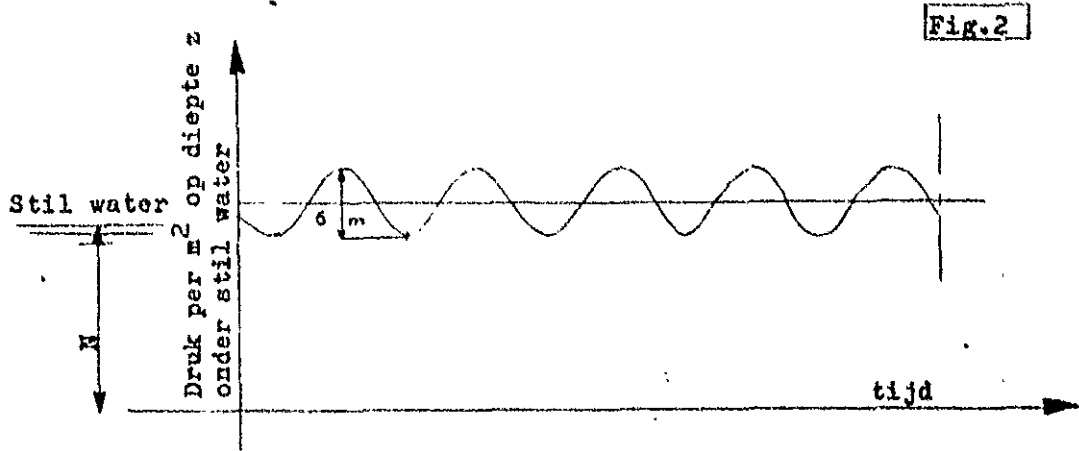
Bedenkt men dan bovendien, dat het patroon van de aankomende golf in werkelijkheid niet zo regelmatig zal zijn als hierboven werd weergegeven en dat behalve de twee weergegeven uitersten ook allerlei tussenvormen mogelijk zijn, dan is duidelijk dat de behoefte werd gevoeld de genoemde verschijnselen nader te onderzoeken.

Het spreekt welhaast vanzelf, dat bij dit onderzoek een ruim gebruik wordt gemaakt van de mogelijkheden, die het hydraulisch modelonderzoek hiervoor biedt. Zowel voor het inzicht in het gedrag van de constructie in het algemeen als voor een verantwoorde opzet van de proeven zijn echter enkele theoretische beschouwingen onontbeerlijk gebleken.

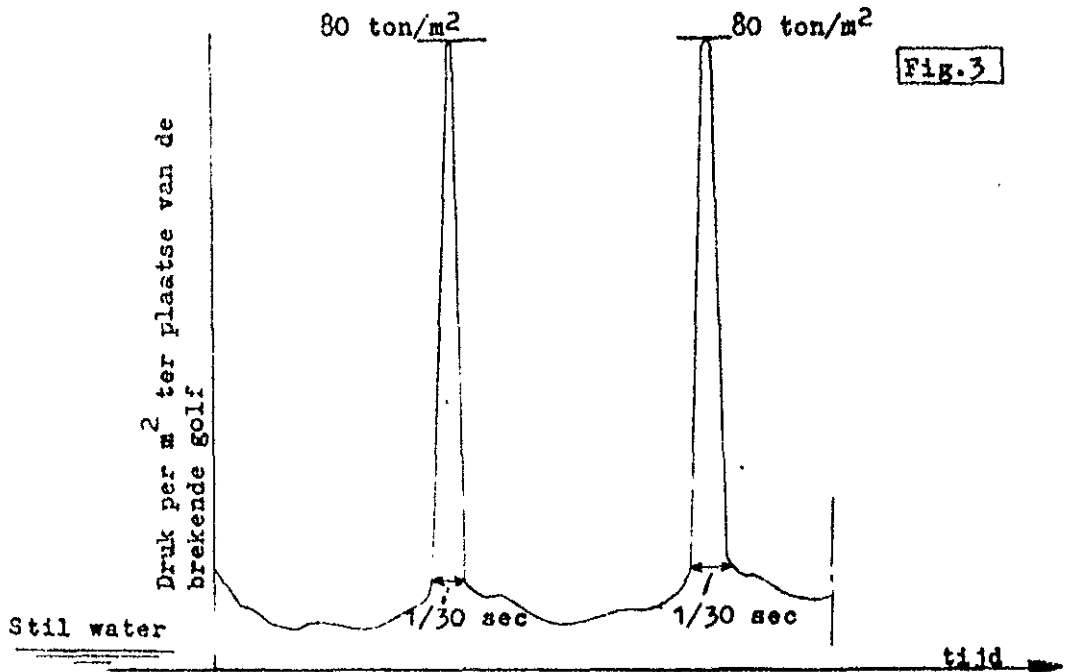
*) Iets dergelijks kan men zelf waarnemen door met de vlakke hand of met een vlak voorwerp op een waterspiegel te slaan.



Ontstaan van drukstoten.



Schema van de belasting op een verticale wand bij volledige terugkaatsing van een golf van 3 m hoogte (top tot dal) en $T = 6$ sec



Schema van de belasting op een verticale wand bij brekingsverschijnselen.

Ten behoeve van hen, die niet direct bij het onderzoek zijn betrokken is in dit rapport getracht deze beschouwingen zo goed mogelijk weer te geven.

Een en ander moet worden beschouwd als het resultaat van gezamenlijk overleg tussen vertegenwoordigers van het Waterloopkundig Laboratorium, de Centrale Studiedienst Rijkswaterstaat, het bureau Sluizen en Stuwen Rijkswaterstaat en de Waterloopkundige Afdeling van de Deltadienst.

2. De bewegingsvergelijking.

Zoals gezegd, wordt de spanningsverdeling die onder invloed van golfaanval in de constructie zal optreden, bepaald door trillingsverschijnselen.

Teneinde hierin enig inzicht te verkrijgen, dient dus in de eerste plaats de bewegingsvergelijking te worden opgesteld.

Omdat het hier gaat om de in horizontale richting werkende golfbelasting, worden in dit rapport in eerste instantie alléén de vormveranderingen in een horizontaal vlak beschouwd. In de laatste paragraaf wordt bovendien nog even ingegaan op het geval van zuivere wringing.

De bewegingsvergelijking kan op eenvoudige wijze worden afgeleid met behulp van het beginsel van 'd'Alembert. Dit beginsel zegt, dat bij de beweging van een lichaam op ieder oogenblik in ieder punt evenwicht bestaat tussen de uitwendig aangrijpende krachten en de in ieder punt aan te brengen traagheidskrachten ($K = - m a$). Het in wezen dynamische probleem kan hiermede worden teruggebracht tot een schijnbaar statisch evenwichtsprobleem.

Door het evenwicht van een element van de prismatisch veronderstelde constructie te beschouwen vindt men de bewegingsvergelijking. In bijlage I werd deze afgeleid, waarbij werd gevonden:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + \mu \frac{d^4 y}{dt^2} = p(xt) \quad (1).$$

waarin:

E = de elasticiteitsmodulus

I = het traagheidsmoment van de prismatisch veronderstelde constructie

y en x = coördinaten resp. \perp en // de lengte-as van de constructie

μ = de massa van de constructie per lengte-eenheid

t = de tijd

$p(xt)$ = de belasting per lengte-eenheid als functie van x en t .

Verreweg de belangrijkste veronderstelling die aan de afleiding van verg.(1) ten grondslag ligt, is de aanname, dat de constructie in de x -richting prismatisch is (d.w.z. dat het traagheidsmoment I over de gehele lengte van de constructie constant is).

Deze veronderstelling zal in dit rapport verder worden gehandhaafd.

Voor het verkrijgen van een algemeen inzicht in de gedragingen van de constructie onder invloed van golfaanval is dit geen bezwaar.

Voor het berekenen van de absolute waarden van de uitwijkingen dient echter de nodige voorzichtigheid in acht te worden genomen.

Verder werd bij het afleiden van de bewegingsvergelijking nog aangenomen:

- dat p een eindige en op stukken continue functie van x is (d.w.z. continu of met een eindig aantal eindige discontinuïteiten)
- dat de vormveranderingen als gevolg van dwarskrachten mogen worden verwaarloosd t.o.v. die als gevolg van buigende momenten.
- dat de vormveranderingen klein zullen zijn ten opzichte van de lengte van de constructie
- dat de wet van Hooke geldig blijft
- dat vlakke dooraneden vlak blijven.

Zoals bekend mag worden verondersteld, is de onnauwkeurigheid als gevolg van deze veronderstellingen zo gering, dat zij geen enkele praktische beperking betekenen voor de toepassing van formule nr. 1.

3. Belasting en uitbuiging als functie van x.

Zowel de belasting p als de uitbuiging y zijn in beginsel een functie van x en t .

Waar het hier in hoofdzaak gaat over het verloop van de vormveranderingen met de tijd, zullen de resultaten van het onderzoek waardevoller zijn naarmate zij minder zijn gebonden aan bepaalde veronderstellingen omtrent de wijze, waarop de belasting over de lengterichting van de sluis (x -richting) is verdeeld. Daarom werd gezocht naar een in dit opzicht zo algemeen mogelijke oplossing.

Een eenvoudige ontwikkeling in reeksen van Fourrier blijkt tot op zekere hoogte de mogelijkheid tot een dergelijke generalisatie te bieden (zie hiervoor bijlage II).

Bedenkt men, dat de belangrijkste onderdelen van de Karingvlietsluisen voor de berekening mogen worden beschouwd als een op 2 steunpunten opgelegde balk, dan kan de uitbuigingsvorm van deze balk als volgt worden uitgedrukt:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \dots \dots \dots (2).$$

In deze reeksontwikkeling is te allen tijde voldaan aan de randvoorwaarden van de op 2 steunpunten opgelegde balk; d.w.z. voor $x = 0$ en $x = l$ moeten $y(t) = 0$ en $\frac{dy}{dx}(t) = 0$ (zie slot bijlage I). Verder kan iedere belastingverdeling die voor het onderhavige geval denkbaar is -zoals bijvoorbeeld een gelijkmatig verdeelde belasting al of niet over de gehele lengte van de sluis- eveneens door een dergelijke reeks worden voorgesteld.

Schrijft men dus:

$$p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \dots \dots \dots (3)$$

, dan wordt hierdoor iedere in de praktijk voorkomende belasting volkomen goed weergegeven. In bijlage 2 wordt dit nog eens nader toegelicht *).

Door de vergelijkingen (2) en (3) te substitueren in verg. (1), kan na enige herleiding tenslotte een betrekking tussen $y_n(t)$ en $p_n(t)$ worden gevonden, waarmede het eigenlijke probleem verder kan worden opgelost.

In bijlage III is de volledige afleiding van deze betrekking weergegeven. Het resultaat is:

$$\frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 y_n(t) = \frac{p_n(t)}{k} \dots \dots \dots (4)$$

- Deze -

*) Voor een over de gehele lengte gelijkmatig verdeelde belasting $p(t)$ werd in deze bijlage gevonden: $p_n(t) = \frac{4 p(t)}{n\pi}$

Deze vergelijking kan voor enige interessante mogelijkheden van het belastingverloop met de tijd gemakkelijk worden opgelost. In de volgende paragrafen zullen hiervan enkele voorbeelden worden gegeven.

Deze oplossingen geven uitdrukkingen voor $y_n(t)$, die zijn afgeleid van $\phi_n(t)$. Door substitutie hiervan in verg. (2) kunnen dan tenslotte de volledige oplossingen worden verkregen. Zoals uit bijlage II blijkt, kan de term $\phi_n(t)$ voor iedere in de praktijk voorkomende verdeling van de belasting in de x-richting worden berekend. Het zal echter niet altijd nodig zijn de te trekken conclusies te verbinden aan een bepaalde veronderstelling omtrent de wijze, waarop de belasting over de lengte van de sluis is verdeeld. De grootte $\phi_n(t)$ kan dan als zodanig in de formules blijven staan en behoeft niet voor concrete gevallen te worden uitgerekend. Om te beginnen zal in de volgende paragraaf op deze wijze het resonantieverschijnsel worden onderzocht. Daarna zullen in de paragrafen 5 en 6 resp. de plotseling aangrijpende belasting en de lineair met de tijd veranderende belasting worden behandeld.

Tenslotte zij nog opgemerkt, dat verg. (4) tevens de grondslag vormt voor de modelproeven, die in het Waterloopkundig Laboratorium te Delft worden uitgevoerd. Hieruit kunnen nl. de eisen worden afgeleid, waaraan de modellen moeten voldoen.

In een aan dit rapport toegevoegd aanhangsel wordt hier nader op ingegaan.

4. Het resonantieverschijnsel.

Een van de belastinggevallen, waarmede rekening moet worden gehouden, is dat van een min of meer regelmatig periodiek verloop (zie fig. 2 pag. 2).

Het is algemeen bekend, dat onder invloed van een dergelijke belasting in een constructie zeer hoge spanningen kunnen ontstaan, indien de periode van de belasting niet voldoende afwijkt van die van de eigen trilling. Bij een constructie als de Haringvlietsluizen moet de periode van de eigen trilling daarom aan bepaalde eisen voldoen. Teneinde deze eisen nader te kunnen omschrijven, zal in deze paragraaf worden nagegaan wat er onder invloed van een periodieke belasting gebeurt.

In bijlage IV werd daartoe de formule afgeleid, die het gedrag van een op 2 steunpunten opgelegde balk weergeeft, indien deze is onderworpen aan een sinusoidale belasting (zie fig. 2 pag. 2). Deze belasting kan worden weergegeven door de formule:

$$\phi_n(t) = \hat{\phi}_n \sin W_b t \quad \text{--- (5)}$$

, waarin W_b de hoekfrequentie van de sinusoidale belasting voorstelt ($W_b = \frac{2\pi}{T}$).

Door dit te substitueren in verg. (3) verkrijgt men dus de volledige uitdrukking voor $\phi(x,t)$, die hier wordt onderzocht.

Substitueert men (5) in (4), dan verkrijgt men een lineaire differentiaalvergelijking die gemakkelijk is op te lossen.

Zoals gezegd wordt deze oplossing weergegeven in bijlage IV. Zij luidt:

$$y_n(t) = \frac{\hat{p}_n}{k' a_n^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \left\{ \sin \omega_n t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega t \right\} \quad (6)$$

Als beginvoorwaarden werden hierbij ingevoerd:

$$y_n(t) = 0 \text{ voor } t = 0 \text{ en } \frac{dy_n(t)}{dt} = 0 \text{ voor } t = 0 \quad (7)$$

Dit betekent dus, dat wordt uitgegaan van de veronderstelling, dat de balk zich bij het begin van de belasting (d.w.z. bij punt 0 in onderstaande figuur nr.4) in de evenwichtstoestand bevindt en geen snelheid bezit.

In beginsel bestaat de beweging dus uit 2 componenten, nl. een gedwongen trilling ($\sin \omega t$), die als het ware de belasting "volgt" en een stelsel eigen trillingen ($\frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t$), die kunnen worden opgevat als een verstoringverschijnsel. Deze eigen trillingen, die behoren bij de uitbuigingsvormen y_n en $\frac{dy_n}{dt}$, worden nl. opgewekt omdat de beginvoorwaarden niet zijn afgestemd op de gedwongen trilling. Na het betrekkelijk plotselinge begin van de belasting (zie fig.4), kan de constructie door zijn traagheid nog niet direct "volgen", waardoor het genoemde verstoringverschijnsel ontstaat. In fig.4 is een en ander nog eens schematisch weergegeven.

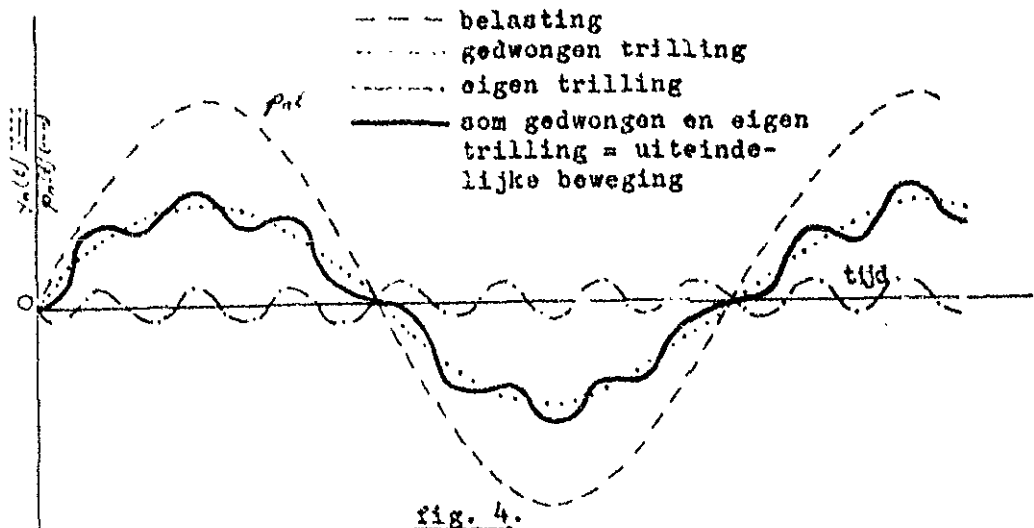


fig. 4.
uitwijking als functie van de tijd (zonder demping)

Zou men andere beginvoorwaarden in rekening willen brengen, dan is dit uiteraard ook mogelijk.

Op de beweging die door formule (6) wordt weergegeven moeten dan andere eigen trillingen worden gesuperponeerd. Men kan dit doen door bij het rechterlid van verg.(6) de termen $y_n(0) \cos \omega_n t$ en $\frac{1}{a_n} \cdot \frac{dy_n}{dt}(0) \cdot \sin \omega_n t$ op te tellen*).

- Deze -

*) De drie componenten, waaruit de eigen trillingen dan tenslotte zijn opgebouwd, komen aldus afzonderlijk in de formule voor.

Deze termen kunnen van belang zijn, indien een eenmaal opgewekte trilling slechts zeer langzaam zou uitdempen. In dat geval zou immers de eigen trilling die zich instelt nadat een golf trein is gepasseerd en men dus tijdelijk te maken heeft met min of meer rustig water, nog niet zijn uitgedempt op het moment, dat een nieuwe golf trein de sluis heeft bereikt (zie fig. 5a). Hoewel over de demping n.g. weinig bekend is, lijkt dit thans echter niet aannemelijk.

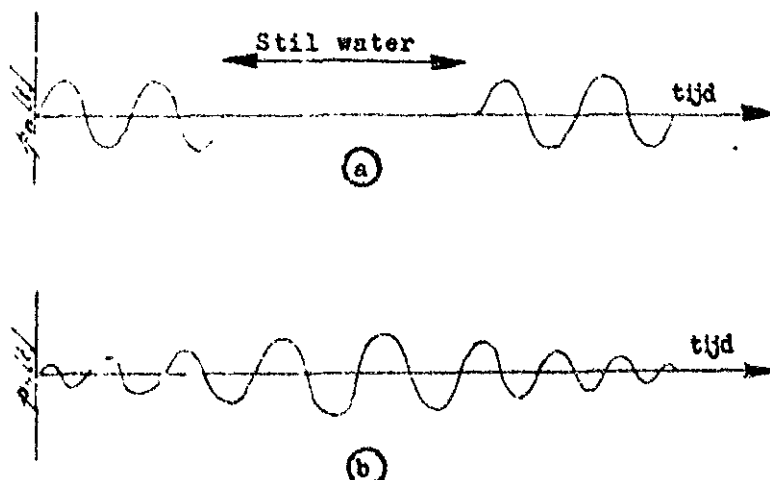


fig. 5
(beginvoorwaarden)

Het in fig. 5b geschetste beeld van een groep golven, die geleidelijk aangroeien en weer afnemen (zwevingen!), is natuurlijk gunstiger dan het in figuur 5a weergegeven beeld. Op grond van de ervaring, dat dit geleidelijk aangrosien der golven niet altijd duidelijk kan worden waargenomen en dat men soms de indruk krijgt dat het in fig. 5a geschetste geval zich ook kan voordoen, wordt in dit rapport aangenomen, dat het laatste als maatgevend moet worden beschouwd.

Op grond van het voorgaande wordt daarom verder verondersteld, dat de in fig. 4 weergegeven belasting (met een betrekkelijk plotselinge begin in 0) en de sub (7) genoemde beginvoorwaarden de werkelijkheid het beste weergeven en dat dus de termen $y_n(0) \cos \omega_n t$ en $\frac{1}{\omega_n} \frac{dy_n}{dt}(0) \sin \omega_n t$ beide gelijk mogen worden gesteld aan nul.

Ter vergelijking met het dynamische geval, werd in bijlage III ook een formule voor een statische belasting \bar{p}_n afgeleid.

Uitgaande van formules die met uitzondering van de letter t geheel gelijk zijn aan (2) en (3), werd daarbij gevonden:

$$Y_n \text{ statisch} = \frac{\bar{p}_n}{4\omega_n^2} \dots \dots \dots (8)$$

Substitueert men de vergelijkingen (6) en (8) resp. in verg. (2) en de gelijkvormige vergelijking voor het statische geval (III-g), dan verkrijgt men de uiteindelijke oplossingen voor het dynamische en het statische probleem. Deze zijn:

$$y(x,t)_{dyn} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{p}_n}{4\omega_n^2} \frac{1}{(1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_b^2})^2} \left(\sin \omega_b t - \frac{\omega_b}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (9)$$

(geldig voor $\phi(x,t) = \phi(x) \sin \omega_b t$)

en:

$$y(x)_{stat} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{p}_n}{4\omega_n^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \dots \dots \dots (10)$$

In bijlage II werd aangetoond, dat voor de meeste praktisch voorkomende statische belastingen slechts één term van de reeks (10) behoeft te worden gebruikt om een zeer goede benadering van het verschijnsel weer te geven*).

Deze benadering blijkt ook voor het dynamische geval te gelden, indien $\omega_n \gg \omega_b$. Uit formule III-e in bijlage III blijkt nl., dat $W_n = n^2 \cdot W_1$. Met toenemende n neemt dus de term $\frac{1}{1 - (\frac{\omega_b}{\omega_n})^2}$ sterk af.

De term tussen accoladen van verg. 9 kan met toenemende n wel groter worden, doch niet in die mate, dat het beginsel dat de 1e term zeer veel groter is dan de volgende termen hierdoor wordt aangetast.

Met zeer goede benadering mag men voor (9) en (10) samen dus schrijven: $(\bar{\phi}_n = \phi_n)$

$$y(x,t)/d_n = y(x)_{stat} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{\omega_b}{\omega_n})^2} \left\{ \sin \omega_b t - \frac{\omega_b}{\omega_n} \sin \omega_n t \right\} \quad (11)$$

geldig voor $\phi(x,t) = \phi(x) \sin \omega_b t$ en voor $\omega_n \gg \omega_b$

$$\frac{\omega_b}{\omega_n} = \frac{T_1}{T_b} = \frac{\text{periode eigen trilling}}{\text{periode belasting}}$$

Voor de berekening zijn natuurlijk speciaal de maximum uitwijkingen van belang. Deze zullen voor $\omega_n \gg \omega_b$ optreden, wanneer $\sin \omega_b t = 1$ en $\sin \omega_n t = -1$, (zie $y_{max dyn}$ in fig. 7).

$$y_{max dyn} = y_{stat} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{\omega_b}{\omega_n})^2} \left(1 + \frac{\omega_b}{\omega_n} \right) \quad \text{of}$$

$$y_{max dyn} = \frac{y_{stat}}{1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_n^2}} \quad \text{of, omdat } \omega = \frac{2\pi}{T} :$$

$$y_{max dyn} = \frac{y_{stat}}{1 - \frac{T_b^2}{T_1^2}} \quad T_b \gg T_1 \quad (12)$$

Uit deze formule kan voor verschillende verhoudingen tussen T_b en T_1 worden afgeleid, welke fout men maakt indien van een sinusoidaal verlopende belasting de grootste waarde statisch in rekening wordt gebracht. Voor de Haringvlietsluizen ($T_1 = 1/5$ sec) werd dit in fig. 6 (pag. 9) grafisch weergegeven.

Omdat door demping of door het in fig. 5b weergegeven golfverloop de verstoringsterm in werkelijkheid niet altijd behoeft op te treden, werd in fig. 6 ook de dan geldende vergrotingsfactor $\frac{1}{1 - (\frac{\omega_b}{\omega_n})^2}$ weergegeven.

Indien de verstoringsterm wel aanwezig is, heeft men te doen met het typische resonantieverschijnsel, dat door fig. 7 wordt weergegeven. Het tijdstip, waarop $y_{max dyn}$ zich voor de eerste maal zal voordoen, is afhankelijk van de verhouding $\frac{\omega_b}{\omega_n}$ of $\frac{T_b}{T_1}$.

Naarmate deze dichter tot 1 nadert, zal het tijdstip van de allergrootste uitwijking later vallen.

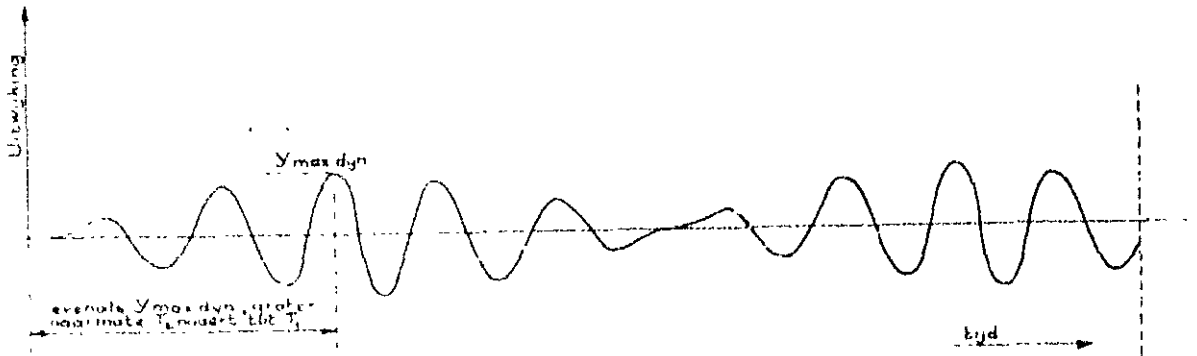
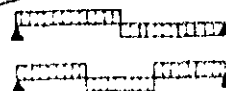


Fig. 7.

Resonantie.

*) Een uitzondering hierop vormen bv.:



- Indien -

Indien $W_b = W_n$ zullen de vervormingen met de tijd blijven toenemen. Theoretisch worden dan dus de uitwijkingen oneindig groot op het tijdstip $t = \text{oneindig}$. Men kan dit santonen, door in verg. 11 te substitueren $W_b = W_1 + \Delta W$ en daarna de limiet te beschouwen voor $\Delta W = 0$. Men krijgt dan:

$$\lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega_1 + \Delta \omega) t - \frac{\omega_1 + \Delta \omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t}{1 - \left(\frac{\omega_1 + \Delta \omega}{\omega_1}\right)^2} = \frac{1}{2} (\omega_1 t \cos \omega_1 t - \sin \omega_1 t)$$

Voor het geval $W_b = W_1$ is dus de oplossing:

$$y(xt)_{\text{dyn}} = y(x)_{\text{stat}} \cdot \frac{1}{2} \{ W_1 t \cos W_1 t - \sin W_1 t \} \quad (13)$$

Deze vergelijking geeft het extreme resonantieverschijnsel weer, nl. een met de tijd toenemende uitwijking die tot breuk zal leiden, indien het verschijnsel lang genoeg aanhoudt en indien andere, nog niet in rekening gebrachte krachten (damping, niet lineaire stijfheid) de vervormingen niet voldoende beperken.

Met behulp van fig. 6 kan o.a. worden nagegaan, in hoeverre de aanval van een lagere golf met een korte periode voor de Haringvlietsluizen gevaarlijker kan zijn dan een hoge golf met een lange periode. Het is immers denkbaar, dat de vergrotingsfactor $\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}$ voor kortere periodes zo groot wordt, dat de geringere waarde van $\hat{\rho}$ (lage golf) hierdoor ruimschoots wordt gecompenseerd. Beschouwt men fig. 6, dan blijkt de vergrotingsfactor pas zeer sterk toe te nemen voor $1/5 \text{ sec} < T_b < 1/2 \text{ sec}$. De golven, die hiernede corresponderen zijn echter zo laag, dat deze niet maatgevend zullen zijn.

Op grond hiervan werd aangenomen, dat het modelonderzoek geen proeven met zeer korte en lage golven behoefde te omvatten. Ook blijkt uit fig. 6 (en uit verg. 12), dat de maatgevende hoge golf ($T_b > 6 \text{ sec}$) zonder bezwaar statisch in rekening kan worden gebracht.

De grootste uitwijking als gevolg van de verstoringsterm in verg. (11) verhoudt zich tot de grootste uitwijking van de gedwongen trilling als $\frac{W_b}{W_1}$ of als $\frac{T_1}{T_b}$.

Voor het onderhavige geval, d.w.z. $T_1 = 1/5 \text{ sec}$ en $T_b > 6 \text{ seconden}$, is dus de invloed van de verstoringsterm zeer gering. Bovendien is dan de term $\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}$ bijna gelijk aan 1, zodat de constructie onder invloed van de maatgevende periodieke belasting vrijwel in een gedwongen trilling verkeert, waarvan de uitwijkingen op ieder moment nagenoeg overeenkomen met de statische uitwijking onder invloed van de op dat moment aangrijpende belasting. De constructie "volgt" als het ware de belasting. Omdat deze redenering geldt voor iedere term van formule 9, is dit dus het geval voor iedere verdeling van de belasting in de x-richting.

- 9 -

Vergrotingsfactor $\frac{y_{\max \text{ dyn}}}{y_{\max \text{ stat}}}$

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0

$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{2}$

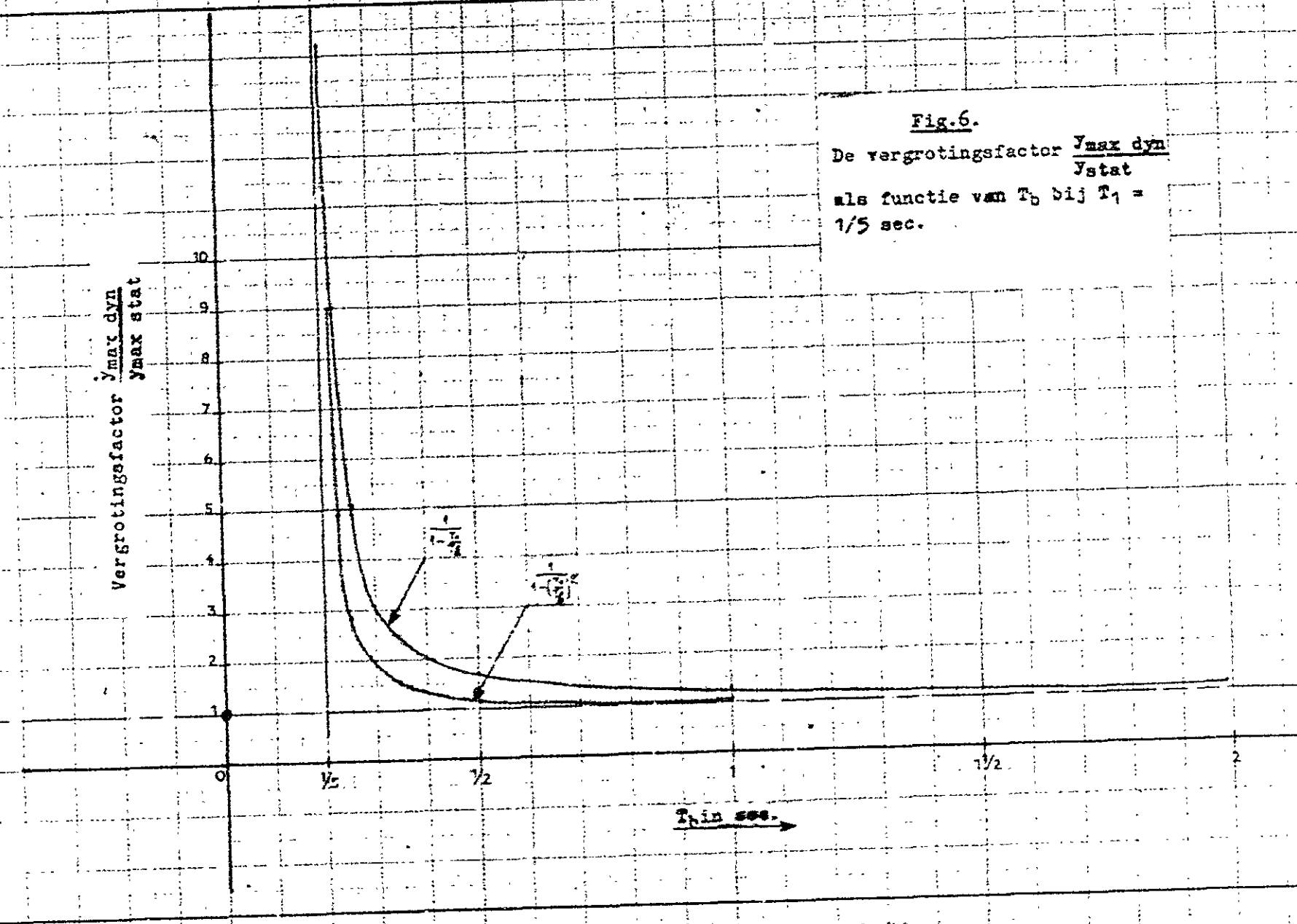
$\frac{1}{2}$

2

T_0 in sec. →

Fig. 6.

De vergrotingsfactor $\frac{y_{\max \text{ dyn}}}{y_{\text{stat}}}$
als functie van T_0 bij $T_1 =$
 $\frac{1}{5}$ sec.



Zoals uit het voorgaande blijkt, behoeft het resonantieverschijnsel uit een oogpunt van golfaanval bij de berekening van de Haringvlietsluizen, waarvan $T_1 \ll 1/5$ sec, niet in beschouwing te worden genomen. In hoeverre resonantie door de werking van het stromende water op de schuiven tijdens spuien van belang kan worden, blijft voorshands een open vraag. Een nader onderzoek in deze richting lijkt zeker gewenst.

Resumerende kan worden gezegd, dat uit een oogpunt van resonantieverschijnselen als gevolg van golfaanval een eigen trillingstijd $T_1 \ll 1/5$ sec voor de Haringvlietsluizen alleszins aanvaardbaar kan worden geacht. De constructie zal bij de maatgevende periodieke golfbelasting vrijwel uitsluitend in een gedwongen trilling verkeren, waarbij de uitwijkingen niet veel groter zullen zijn dan de "statische". Voor de meeste belastinggevallen geeft formule 11 een zeer goede benadering. Voor sommige verdelingen is de benadering iets minder goed. In enkele gevallen (zie de noot op pag.8), moet de 2e of de 3e term worden gebruikt. In andere gevallen zal men 2 of meer termen van de algemeen geldende formule 9 moeten meenemen.

5. De plotseling aangrijpende en weer eindigende belasting.

Naast de periodieke belasting die in de vorige paragraaf werd besproken, dient ook het geval van de impulsieve belasting te worden beschouwd, omdat hierbij aanzienlijk hogere drukken kunnen optreden. Hoewel deze slechts gedurende een korte tijd werken, moet worden nagegaan of deze combinatie van korte tijdsduur en zeer hoge belasting onguntiger kan zijn dan de quasi-statische belasting van de staande golf. In bijlage V werden daarom de formules afgeleid, die de bewegingen van de sluis onder invloed van de in fig.8 weergegeven belasting uitdrukken.

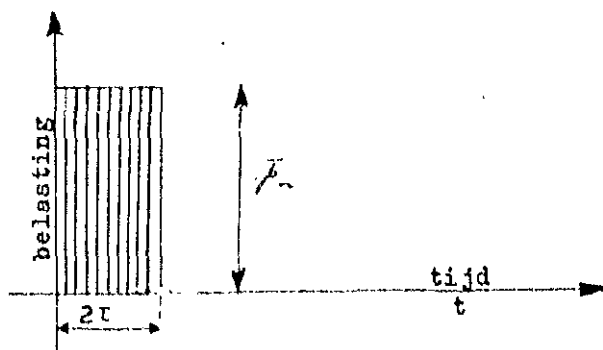


fig. 8

Belastingschema.

Dit belastinggeval kan worden beschouwd als een extreem geval. In werkelijkheid zal de belastingtoename met de tijd wel zeer snel, doch niet discontinu verlopen. In par.6 zal daarom ook een driehoekig verloopende belasting worden beschouwd. Daarbij zal dan tevens worden nagegaan, in hoeverre men de belasting van fig.3 door een rechthoekig verloop mag schematisaeren. In bijlage V werd voor het in fig.8 weergegeven belastingverloop gevonden:

$$\text{voor } t < 0 : y_n(t) = 0 \quad (14)$$

$$\text{voor } 0 < t < 2\tau : y_n(t) = \frac{F_n}{\mu n^2} (1 - \cos n_n t) \quad (15)$$

$$\text{voor } t > 2\tau : y_n(t) = \frac{2F_n}{\mu n^2} \sin n_n \tau \sin n_n(t-\tau) \quad (16)$$

Deze formules zijn geldig voor iedere waarde van t . Bij de afleiding werd, evenals in de vorige paragraaf verondersteld, dat de constructie ten tijde $t = 0$ geen uitwijking en geen snelheid heeft. Weest men andere randvoorwaarden in rekening te brengen, dan moeten bij het rechterlid van de vergelijkingen (14), (15) en (16) weer de termen $y_n(0) \cos n_n t$ en $\frac{1}{\omega_n} \frac{dy_n}{dt}(0) \sin n_n t$ worden opgeteld (zie verg.V-e

in bijlage V). Ook hier geldt weer, dat voor de meeste practisch voorkomende belastingverdelingen de eerste termen van de reeksen in de vergelijkingen 15 en 16 zeer groot zijn t.o.v. de volgende termen (zie de noot op pag.8). Brengt men dus alléén de eerste termen in rekening en substitueert men, evenals bij het in de vorige paragraaf behandelde geval, de vergelijkingen (14), (15) en (16) samen met verg.(8) in verg.(2), dan verkrijgt men:

$$\text{voor } t < 0 : y(x,t) = 0 \quad (17)$$

$$\text{voor } 0 < t < 2\tau : y(x,t) = y(x)_{\text{stat.}} \cdot (1 - \cos W_1 t) \quad (18)$$

$$\text{voor } t > 2\tau : y(x,t) = y(x)_{\text{stat.}} \cdot 2 \sin W_1 \tau \sin W_1(t-\tau) \quad (19)$$

Beschouwen wij nu eerst formule (18), dan blijkt, dat de uitwijkingen onder invloed van een plotseling aangrijpende last vóór het einde der belasting ten hoogste 2 maal zo groot kunnen worden als die, welke zouden ontstaan, indien dezelfde last geleidelijk was aangebracht. Deze grootste uitwijkingen treden op, wanneer $\cos W_1 t = \cos \frac{2\pi t}{T_1} = -1$ of wel, wanneer

$$t = n' \cdot \frac{1}{2} T_1 \quad (n' = 1, 3, 5, \dots \text{ enz.})$$

Omdat de formule alléén geldig is voor $0 < t < 2\tau$, moet dan bovendien $2\tau \gg n' \cdot \frac{1}{2} T_1$.

Uit formule (19) volgt, dat ook ná het einde der belasting de uitwijkingen ten hoogste 2 maal zo groot kunnen zijn als de statische uitwijkingen. Dit doet zich voor wanneer:

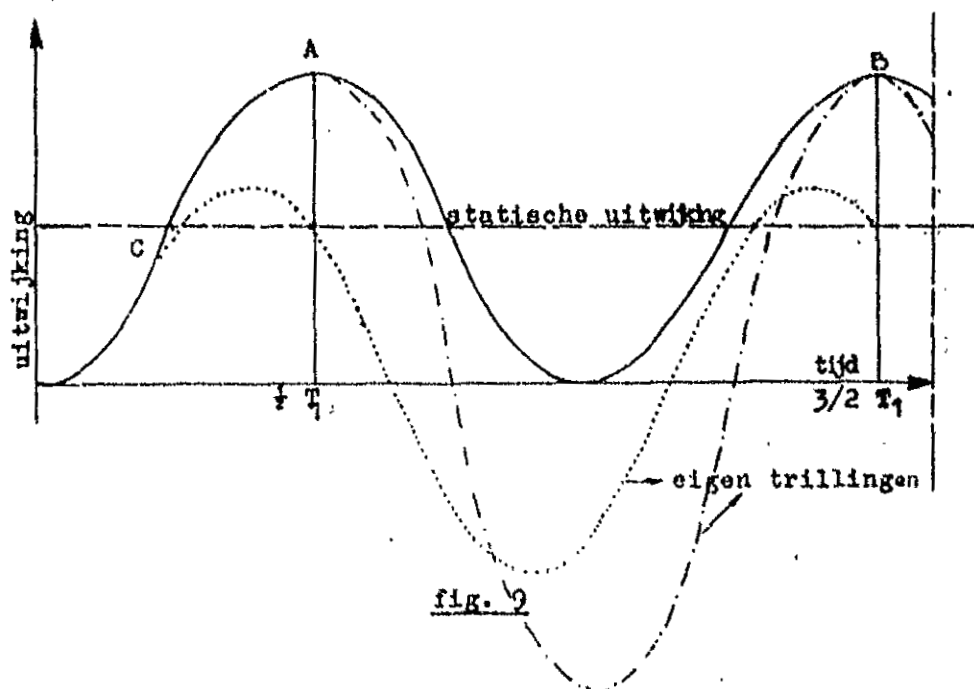
$$\sin W_1 \tau = \sin \frac{2\pi \tau}{T_1} = 1 \text{ of: } 2\tau = n' \cdot \frac{1}{2} T_1$$

$$\text{en: } \sin W_1(t-\tau) = 1 \text{ of } \frac{2\pi(t-\tau)}{T_1} = n' \cdot \frac{\pi}{2} \text{ of}$$

$$\text{omdat } 2\tau = n' \cdot \frac{1}{2} T_1 ; \quad t = n' \cdot \frac{1}{2} T_1 .$$

Voor beide voorwaarden geldt weer: $n' = 1, 3, 5 \dots$ enz. Eindigt dus de belasting op een tijdstip $t = n' \cdot \frac{1}{2} T_1$, dan zijn de uitwijkingen 2 maal de statische. Deze maximale uitwijkingen zijn dan tevens de amplituden van de eigen trilling, die na het einde van de belasting zal ontstaan. Eindigt de belasting op een ander tijdstip, dan zijn de uitwijkingen na afloop van de belasting kleiner dan 2x de statische uitwijkingen.

Practisch komt het er dus op neer, dat de maximale dynamische uitwijkingen als gevolg van een plotseling aangrijpende last 2 maal zo groot kunnen zijn als de statische uitwijkingen, indien $2\tau \gg \frac{1}{2} T_1$ *). Afhankelijk van de grootte van τ en van het tijdstip, waarop de belasting eindigt, treden deze maximale uitwijkingen één of meer malen op. Hierbij zij opgemerkt, dat de demping niet in de formules werd opgenomen. In figuur 9 en 10 werd een en ander nog eens grafisch weergegeven.



Uitwijkingen als functie van de tijd bij een plotseling aangrijpende en oindigende belasting.

- Indien belasting eindigt op tijdstip $t = n' \cdot \frac{1}{2} T_1$
(A, B enz.; $n' = 1, 3, 5 \dots$ enz.)
- Indien belasting eindigt op tijdstip $t = \frac{1}{5} T_1$
(d.w.z. in C; $2\tau = \frac{1}{5} T_1$)
- Statische uitwijking.
- _____ Indien belasting blijft ($2\tau \gg \frac{1}{2} T_1$)

*) De factor 2 hangt uiteraard samen met de factor $\frac{1}{2}$ van de wet van Clapeyron.

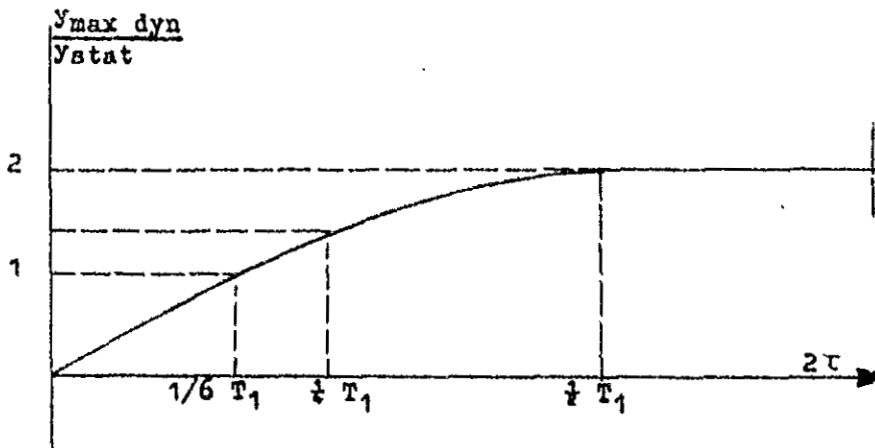


Fig. 10.

De vergrotingsfactor $\frac{Y_{\max \text{ dyn}}}{Y_{\text{stat}}}$ bij een plotseling aangrijpende en eindigende belasting als functie van de tijdsduur van deze belasting (2τ) (geldt niet voor iedere belastingverdeling).

Resumerende kan dus voor een groot aantal verdelingen over de lengte van de sluis (o.a. gelijkmatig verdeeld) worden gezegd, dat voor het belastinggeval van fig. 8 een stootcoëfficiënt in rekening moet worden gebracht, die gelijk is aan:

- 2 indien $2\tau \gg \frac{1}{2} T_1$
- 1 à 2 indien $\frac{1}{6} T_1 < 2\tau < \frac{1}{2} T_1$ (zie fig. 10)
- < 1 indien $2\tau < \frac{1}{6} T_1$ (zie fig. 10).

Voor sommige belastingverdelingen dient voor T_1 , te worden gelezen T_n (zie de noot op pag. 8). Voor andere gevallen bestaat altijd de mogelijkheid een en ander nader uit te werken met behulp van de formules 14 t/m 16 en 2.

6. De geleidelijk toe- en afnemende belasting.

De formules en beschouwingen die in de vorige paragraaf zijn gegeven, hebben slechts praktische waarde, indien men weet, in hoeverre een in werkelijkheid gemeten belastingverloop (zoals bijvoorbeeld fig. 3 pag. 2) mag worden geschematiseerd door een rechthoekig diagram. Teneinde hierin enig inzicht te verkrijgen, werden in bijlage VI formules afgeleid voor het in figuur 11 weergegeven belastingsschema.

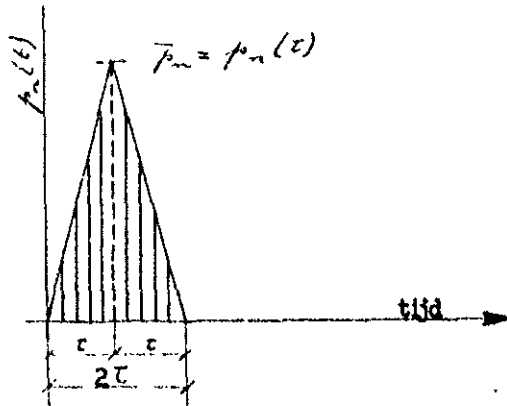


fig. 11
Belastingschema.

Uitgaande van de beginvoorwaarden $y_n(0)$ en $\frac{dy_n(0)}{dt} = 0$ (d.w.z. géén uitwijking en géén snelheid voor $t = 0$), werd hierbij gevonden:

$$\text{voor } 0 < t < \tau: y_n(t) = \frac{\bar{p}_n}{\mu \omega_n^2} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot \left(1 - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t}\right) \quad (20)$$

$$\text{voor } \tau < t < 2\tau: y_n(t) = \frac{\bar{p}_n}{\mu \omega_n^2} \left[2 - \frac{t}{\tau} + \frac{(2 - \cos \omega_n \tau)}{\omega_n \tau} \cdot \sin \omega_n (t - \tau) - \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \tau} \cos \omega_n (t - \tau) \right] \quad (21)$$

$$\text{voor } t > 2\tau: y_n(t) = \frac{t \bar{p}_n}{\mu \omega_n^2} \cdot \frac{(1 - \cos \omega_n \tau)}{\omega_n \tau} \cdot \sin \omega_n (t - \tau) \quad (22)$$

Wenst men nu een driehoekig spanningsverloop te schematiseren door een rechthoekig diagram, dan is het logisch dit zo te doen, dat de oppervlakte van het diagram ($\int \bar{p}_n dt$) en de basis gelijk blijven. Men komt zo tot een schematisatie, zoals in fig. 12 is weergegeven.

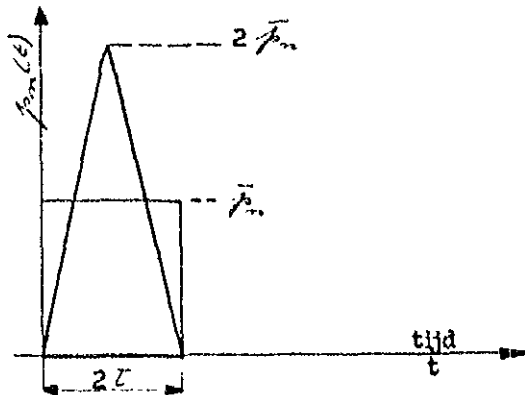


fig. 12
Schematisatie door een rechthoekig diagram.

Door vergelijking van de formules (16) en (22) kan worden nagegaan, in hoeverre een dergelijke schematisatie toelaatbaar is. Uit de in fig. 12 bijgeschreven waarden (\bar{p}_n en $2\bar{p}_n$) blijkt echter, dat men, alvorens dit te doen, het rechterlid van vergelijking (22) met een factor 2 moet vermenigvuldigen. Vergelijkt men daarna de 2 formules, dan blijkt de schematisatie toelaatbaar te zijn, indien:

$$\frac{2(1 - \cos \omega_n \tau)}{\omega_n \tau} \approx \sin \omega_n \tau \quad (23)$$

Door substitutie van de reeksen:

$$\begin{aligned} \sin W_n \tau &= W_n \tau - \frac{(W_n \tau)^3}{3!} + \frac{(W_n \tau)^5}{5!} \dots \dots \dots \text{enz. en} \\ \cos W_n \tau &= 1 - \frac{(W_n \tau)^2}{2!} + \frac{(W_n \tau)^4}{4!} \dots \dots \dots \text{enz.,} \end{aligned}$$

gaat vergelijking (23) over in:

$$W_n \tau - \frac{1}{4} (W_n \tau)^3 + \frac{1}{6} (W_n \tau)^5 = \dots \dots \dots \text{enz.} \approx W_n \tau - \frac{1}{4} (W_n \tau)^3 + \frac{1}{6} (W_n \tau)^5 \dots \dots \dots \text{enz.}$$

Hieruit blijkt dus, dat schematisatie toelaatbaar is, indien

$$\frac{1}{2} (W_n \tau)^2 \ll 1 \quad \text{of} \quad \frac{1}{2} (W_n \tau)^2 \ll 1 \quad (24)$$

De fout is dus kleiner dan 10%, indien:

$$W_n \tau \ll 1 \quad \text{of} \quad 2\tau \ll \frac{r_n}{\pi} \quad (25)$$

Voor de Haringvlietsluizen (met $W_1 \approx 40$) betekent dit, dat belastingdiagrammen voor de berekening op de bovenomschreven wijze mogen worden geschematiseerd, indien $\tau \ll 1/40$ of $2\tau \ll 1/20$ seconde.

Dit geldt dan voor alle belastingverdelingen, waarbij men uitsluitend te maken heeft met W_1 , en niet of nauwelijks met $W_2, W_3 \dots \dots$ enz. (zie bijlage II).

Is dit niet het geval, dan maakt men door schematisatie een grotere fout, ($W_n = n^2 W_1$). Met behulp van de in dit rapport ontwikkelde formules kan echter altijd een goede schatting worden gedaan.

7. Wringing.

Zoals o.a. uit fig.1 op pag.2 blijkt, kan de nabla-ligger ook op wringing worden belast.

Op precies dezelfde wijze als voor de op buiging belaste balk (zie par.2 en par.3), kan ook voor het geval van zuivere wringing een bewegingsvergelijking worden opgesteld. Voor ieder massadeeltje moet dan een traagheidskracht worden ingevoerd, die evenredig is met de afstand r van dit deeltje tot het zwaartepunt van de doorsnede.

De bewegingsvergelijking wordt dan:

$$\frac{d^2 \varphi_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 \varphi_n(t) = \frac{m_n \ddot{t}}{J_{m,b}} \quad (26)$$

waarin:

$\varphi_n(t)$ = de Fourriercoëfficiënt uit de reeksontwikkeling: $\varphi(x,t) =$ de hoekverdraaiing van een dwarsdoorsnede als functie van x en $t = \sum_n \varphi_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$

$w_1^1 = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{GJ_{\text{torse}}}{m}}$ de hoekfrequentie van de eigen trilling
bij wringing, behorende bij de hoekverdraaiing $\varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l}$

$m_n(t)$ = de Fouriercoëfficiënt uit de reeksontwikkeling $m(x,t) =$
uitwendig aangrijpend wringend moment (kracht maal
excentriciteit) = $\sum_{n=1}^{\infty} m_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$

I_{mp} = massatraagheidsmoment t.o.v. het zwaartepunt van de
doorsnede = $\int_F \rho r^2 dF$

, waarin F = oppervlakte dwarsdoorsnede
 r = afstand element dF tot het zwaartepunt
 ρ = massa per volumeneenheid.

Bij vergelijking met formule(4) ziet men direct, dat de
dynamische verschijnselen, die zich bij zuivere wringing kunnen
voordoen, eenzelfde karakter hebben als die, welke bij een op
buijing belaste balk kunnen ontstaan.

Teneinde niet in herhaling te vervallen, wordt daarom voor de
interpretatie van formule (26) verwezen naar de paragrafen 4,
5 en 6. Voor de Haringvlietsluizen geldt

$$T_1^1 = \frac{2\pi}{w_1^1} = \dots \text{ sec.}$$

De eisen, waaraan bij het experimentale onderzoek moet worden
voldaan om hierbij ook de wringing goed weer te geven, kunnen worden
afgeleid uit formule (26).

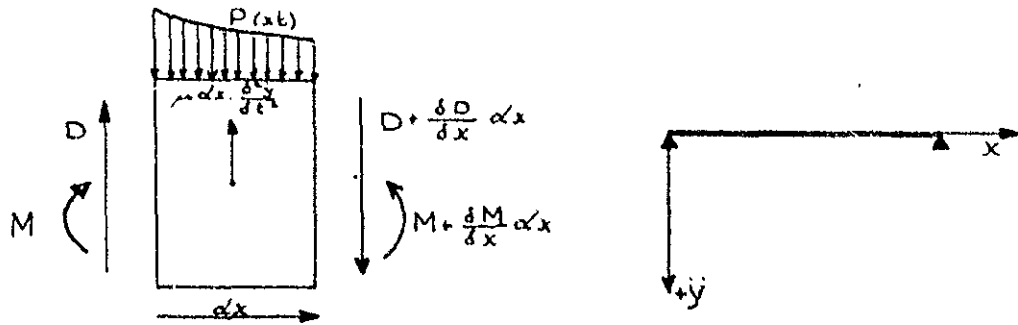
Hiervoor wordt verwezen naar de als aanhangsel opgenomen toelichting
van het Waterloopkundig Laboratorium te Delft.

Nomenclatuur.

- T_b = Trillingstijd (periode) van de uitwendig aangrijpende periodieke belasting.
- T_n = Trillingstijd (periode) van de eigen trilling van een op 2 steunpunten opgelegde balk, behorende bij de uitbuigingsvorm $y(x) = y_n \sin \frac{n\pi x}{l}$
- $\omega_b = \frac{2\pi}{T_b}$ = hoekfrequentie van de uitwendig aangrijpende periodieke belasting.
- $\omega_n = \frac{n\pi}{T_n}$ = hoekfrequentie van de eigen trilling van een op 2 steunpunten opgelegde balk, behorende bij de uitbuigingsvorm $y(x) = y_n \sin \frac{n\pi x}{l}$
- y en x coördinaten resp. \perp en \parallel de lengterichting van de constructie
-
- t = tijd.
- $y(x,t)$ = de coördinaat y als functie van x en t.
- $p(x,t)$ = Belasting per eenheid van lengte als functie van x en t.
- $y_n, \hat{a}_n, \hat{p}_n$ = Fouriercoëfficiënten (zie bijlage II).
- E. = Elasticiteitsmodulus.
- I = Het traagheidsmoment van de prismatisch veronderstelde constructie.
- μ = De massa van de constructie per lengte-eenheid.
- n = m = 1, 2, 3, 4 enz.
- 2τ = Tijdsduur van de impulsieve belastingen (zie fig. 8 en 11).
- $\varphi_n(t)$ = de Fouriercoëfficiënt uit de reeksontwikkeling: $\varphi(x,t)$ = de hoekverdraaiing van een dwarsdoorsnede als functie van x en t. = $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$
- $\omega_n^1 = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{G I_{wring}}{I_{mp}}}$ = de hoekfrequentie van de eigen trilling bij wringing, behorende bij de hoekverdraaiing $\varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l}$
- $m_n(t)$ = de Fouriercoëfficiënt uit de reeksontwikkeling $m(x,t)$ = uitwendig aangrijpend wringend moment (kracht maal excentriciteit) = $\sum_{n=1}^{\infty} m_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$
- $I_{mp} = \int \rho r^2 \cdot dF$ = massatraagheidsmoment t.o.v. het zwaartepunt van de doorsnede =

Bijlage nr. I.

(afleiding bewegingsvergelijking)



Element v d. constructie

Tekenafpraak.

Nomenclatuur:

D = dwarskracht

M = moment

$p(x,t)$ = uitwendige belasting per eenheid van lengte als functie van x en van t

t = tijd

x en y = coördinaten resp. // en \perp de lengte-as van de constructie

μ = massa per lengte-eenheid van de constructie

R = kromtestraal bij vervorming van de constructie.

Afleiding.

Evenwicht in de y richting (de golfkrachten werken in horizontale richting. Het eigen gewicht mag dus worden verwaarloosd):

$$p(x,t) \cdot dx + \frac{dD}{dx} dx - \mu dx \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = 0 \quad (I-a)$$

Momenten-evenwicht:

$$-\frac{dM}{dx} dx + D \cdot dx + \text{termen met } dx^2 = 0 \quad (I-b)$$

$p(x)$ werd hierbij dus eindig en continu of met een eindig aantal eindige discontinuïteiten verondersteld. Voor het onderhavige probleem heeft deze veronderstelling geen enkele praktische betekenis.

Verwaarloost men de termen met dx^2 ten opzichte van die met dx, dan gaat de momentenvergelijking over in:

$$\frac{dM}{dx} = D \quad (I-c)$$

Uit de elementaire toegepaste mechanica is verder bekend:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} = - \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (I-d)$$

Aan de eerste gelijkheid liggen slechts de algemeen gebruikelijke veronderstellingen uit de toegepaste mechanica ten grondslag (de wet van Hooke en "vlakke doorsneden blijven vlak"). De tweede gelijkheid berust op de veronderstelling, dat de vervormingen relatief klein blijven ($\frac{\delta^2 y}{dx^2}$ klein t.o.v. 1).

Bovendien werd aangenomen, dat de vormveranderingen als gevolg van de schuifspanning relatief klein zijn en dus mogen worden verwaarloosd. Al deze veronderstellingen zijn voor het onderhavige geval volkomen aanvaardbaar.

Uit (I-c) en (I-d) volgt:

$$D = -EI \frac{\delta^3 y}{\delta x^3} \quad \text{of voor een prismatische balk:} \\ \frac{dD}{dx} = -EI \frac{\delta^4 y}{\delta x^4} \quad (I-e)$$

Substitueert men dan (I-e) in (I-a) dan verkrijgt men de bewegingsvergelijking:

$$EI \frac{\delta^4 y}{\delta x^4} + \mu \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = p(x,t) \quad (1)$$

Randvoorwaarden

Voor constructies, die -zoals de Haringvlietsluizen- voor de berekening mogen worden beschouwd als een op 2 steunpunten opgelegde balk, gelden de volgende randvoorwaarden:

$$\begin{array}{l} \text{Voor } x = 0 : \quad y(t) = 0 \quad \text{en } M(t) = 0 \dots\dots) \\ \text{Voor } x = l : \quad y(t) = 0 \quad \text{en } M(t) = 0 \dots\dots) \dots\dots \end{array} \quad (I-f)$$

Volgens formule (I-d) mag hiervoor dus ook worden geschreven:

$$\begin{array}{l} \text{Voor } x = 0 : \quad y(t) = 0 \quad \text{en} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = 0 \\ \frac{\delta^4 y}{\delta x^4} = 0 \end{array} \right\} \\ \text{Voor } x = l : \quad y(t) = 0 \quad \text{en} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = 0 \\ \frac{\delta^4 y}{\delta x^4} = 0 \end{array} \right\} \end{array} \quad (I-g)$$

Bijlage II.

Voorbeelden reeksontwikkeling (Fourrier).

1. De Fouriercoëfficiënt (p_n).

In verg. (3) werd gesteld, dat de practisch voorkomende belastingen $p(x)$ als volgt in een reeks kunnen worden ontwikkeld:

$$p(x) = p_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + p_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + p_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} + \dots \text{ENZ.}$$

Vermenigvuldigen wij beide leden met $\sin \frac{n\pi x}{l} dx$ en integreren wij tussen l en 0 , dan is het resultaat:

$$\int_0^l p(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = p_1 \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx + p_2 \int_0^l \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \dots$$

$$\dots + p_n \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx + \dots \text{ENZ.}$$

Wegens de orthogonaliteit (d.w.z. $\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0$ behalve voor $m = n$) volgt hieruit:

$$\int_0^l p(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = p_n \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx \text{ of: } p_n = \frac{\int_0^l p(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx} \text{ of:}$$

$$p_n = \frac{2}{l} \int_0^l p(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \dots \dots \dots \text{ (II-a)}$$

2. Do gelijkmatig verdeelde belasting.

Voor de gelijkmatig verdeelde belasting \bar{p} geldt dus:

$$\bar{p}_n = \frac{2}{l} \bar{p} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx \text{ of: } \bar{p}_n = \frac{2}{l} \bar{p} \left[-\frac{l}{n\pi} (\cos n\pi - 1) \right]$$

Voor $n = \text{even}$ is $\cos n\pi = 1$ en dus $\bar{p}_n = 0$

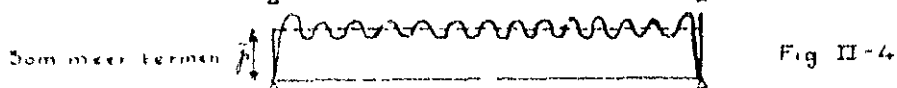
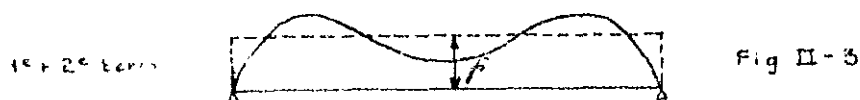
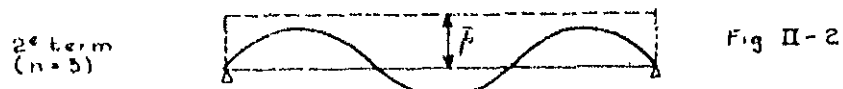
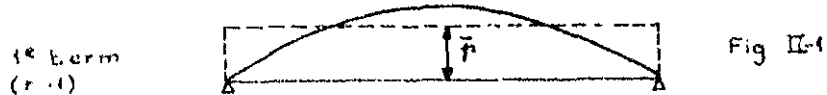
Voor $n = \text{oneven}$ is $\cos n\pi = -1$ en dus $\bar{p}_n = \frac{4\bar{p}}{n\pi}$

De gelijkmatig verdeelde belasting \bar{p} kan dus worden woergegeven door:

$$p(x) = \frac{4\bar{p}}{\pi} \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{n'} \sin \frac{n'\pi x}{l} \text{ (II-b)}$$

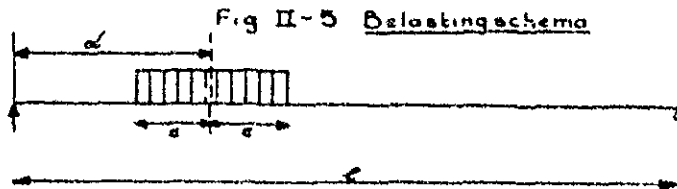
, waarin $n' = 1, 3, 5, \dots \text{ enz.}$

Dat men met een dergelijke reeksontwikkeling inderdaad goede resultaten kan verkrijgen blijkt uit onderstaande schetsen nr. 1, 2, 3 en 4



3. Andere praktisch voorkomende belastingverdelingen $p(x)$.

De golfbelasting heeft niet altijd over de volle lengte van de sluis te werken. Het is daarom nuttig ook het in onderstaande schets weergegeven geval te beschouwen:



Formule (II-a) gaat nu over in:

$$\bar{p}_n = \frac{4f}{l} \int_{a-c}^{a+c} \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Werkt men dit uit, dan is het resultaat:

$$\bar{p}_n = \frac{4f}{n\pi} \sin \frac{n\pi d}{l} \sin \frac{n\pi c}{l}$$

De in fig. II-5 weergegeven belasting kan dus worden voorgesteld door:

$$p(x) = \frac{4f}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi d}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

, waarin $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ enz. (II-c)

4. De invloed der termen $n = 1, n = 2, n = 3, \dots$ enz.

Gaat men nu, welke invloed de verschillende termen van de reeksen op het eindresultaat hebben, dan blijkt het volgende: gelijkmatig verdeelde belasting over de volle lengte van de balk.

Volgens formule (10) (zie rapport pag. 7) is:

$$y(x)_{stat} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{p}_n}{\mu W_n} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (10)$$

Hierin is:

$$W_n = \frac{n^4 \pi^4}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (\text{zie formule III-e})$$

of: $W_n = n^4 W_1$ (II-d)

Voor de gelijkmatig verdeelde belasting was gevonden:

$$\bar{p}_n = \frac{4f}{n\pi} \quad (\text{waarin } n' = 1, 3, 5, \dots \text{ enz.}) \quad (II-e)$$

Substitueren wij II-d en II-e in verg. (10), dan verkrijgen wij dus:

$$y(x)_{stat} = \frac{4f}{\mu \pi W_1} \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{(n')^3} \sin \frac{n'\pi x}{l} \quad (II-f)$$

, waarin $n' = 1, 3, 5, \dots$ enz.

Hieruit blijkt onmiddellijk, dat de uitwijking voor iedere x vrijwel geheel wordt beheerst door de 1e term. Afhankelijk van de waarde van x is deze 81 tot 243 maal zo groot als de 2e term. In het midden van de balk, waar de uitwijking ons voor deze asymmetrische belasting het meeste interesseert, geldt de factor 243!

Voor de gelijkmatig verdeelde belasting kan dus als zeer goede benadering worden geschreven:

$$y(x)_{stat} = \frac{\bar{p}_1}{\mu W_1} \sin \frac{\pi x}{l} = y_1 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (II-g)$$

, waarin $\bar{p}_1 = \frac{4}{\pi} f$

Voor de in fig. II-5 weergegeven belasting kan een dergelijke redenering worden gevolgd.

Men krijgt dan:

$$y(x)_{stat} = \frac{4P}{\mu \pi W^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi d}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (\text{II-h})$$

Beschouwen wij nu het geval, waarbij de helft van de balk is belast (d.w.z. $d = c = \frac{1}{2}l$), dan blijkt ook voor deze asymmetrische belastingverdeling de 1e term van overwegend belang te zijn. Voor het midden van de balk geldt dan weer, dat de 1e term 243 maal zo groot is dan de daaropvolgende term. Hoewel deze verhouding voor $x = \frac{1}{2}l$ minder gunstig is, blijft ook daar de fout kleiner dan 10%, indien van de reeks slechts één term wordt gebruikt.

Bij zeer kleine waarden van c kan de belasting als een puntlast worden opgevat.

Stelt men dan $2c = P$, dan gaat formule (II-h) over in:

$$y(x)_{stat} = \frac{2D}{\mu W^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi d}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (\text{II-i})$$

Onderzoekt men dit voor verschillende gevallen, dan blijkt ook hier de eerste term veelal reeds een voldoende benadering te geven. Voor sommige gevallen zal men echter meer termen moeten gebruiken.

Resumerende kan dus worden gezegd, dat voor ieder geval afzonderlijk moet worden nagegaan, hoeveel termen moeten worden gebruikt. De gegeven formules bieden hiertoe de mogelijkheid. Voor de meeste belastingverdelingen die voor de praktijk interessant zijn, geeft de eerste term reeds een voldoende benadering.

Bijlage III.

Afleiding van formule (4).

De bewegingsvergelijking (1) was:

$$EI \frac{\delta^4 y}{\delta x^4} + \mu \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = p(x,t) \quad (1)$$

De in de praktijk voorkomende belastingverdelingen en de daarbij behorende uitbuigingsvormen kunnen als volgt in uniform convergerende*) reeksen van Fourrier worden ontwikkeld (zie bijlage II)

$$p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3)$$

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2)$$

Substitueren wij deze twee uitdrukkingen in de bewegingsvergelijking, dan volgt hieruit:

$$EI \frac{\delta^4}{\delta x^4} \left[\sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \right] + \mu \frac{\delta^2}{\delta t^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (III-a)$$

Wegens de uniforme convergentie mogen de reeksen term voor term worden gedifferentieerd.

Verg.(III-a) kan dus worden geschreven als:

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu \frac{\alpha^2 y_n(t)}{\alpha t^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (III-b)$$

Door beide leden van verg.(III-b) te vermenigvuldigen met $\sin \frac{m\pi x}{l}$ en daarna te integreren van 0 naar l, kan gebruik worden gemaakt van de z.g. orthogonaliteit, d.w.z. dat $\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ voor iedere waarde van n, uitgezonderd $n = m$, gelijk is aan nul. Van de reeksen in verg.(III-b) blijft dan dus slechts één term over, nl. die met

$$\int_0^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx$$

Men krijgt dan dus:

$$EI \frac{m^4 \pi^4}{l^4} y_m(t) \int_0^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx + \mu \frac{\alpha^2 y_m(t)}{\alpha t^2} \int_0^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx =$$

$$p_m(t) \int_0^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx$$

$$\mu \frac{\alpha^2 y_m(t)}{\alpha t^2} + EI \frac{m^4 \pi^4}{l^4} y_m(t) = p_m(t) \quad (III-c)$$

Lost men deze vergelijking op voor $p_m(t) = 0$ (d.w.z. géén uitwendige belasting!), dan verkrijgt men de oplossing voor de z.g. eigen trilling.

Deze oplossing is: (zie hiervoor ook de complementaire oplossing in bijlage IV).

$$y_m = C_1 \cos W_m t + C_2 \sin W_m t \quad (III-d)$$

$$, \text{ waarin } W_m = \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (III-e)$$

Zoals uit de afleiding in bijlage II blijkt, stelt deze vergelijking de eigen trilling voor, behorende bij de uitbuigingsvorm

$$y(x,t) = \hat{y}_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l}$$

W_m is dan de daarop betrekking hebbende hoekfrequentie.

*) Uniform convergerend wil in dit geval zeggen convergent voor iedere waarde van x tussen 0 en l.

Door substitutie van verg. (III-e) in (III-c) gaat deze laatste vergelijking over in:

$$\frac{\alpha^2 y_m(t)}{\alpha t^2} + \omega_m^2 y_m(t) = \frac{p_m(t)}{\mu} \quad (\text{III-f})$$

Uit de afleiding blijkt, dat men voor m ieder geheel getal kan kiezen. Het spreekt vanzelf, dat men in verg. (4) de letter m kan vervangen door de oorspronkelijk gebruikte letter n .
($m = n = 1, 2, 3 \dots$ enz.)

Aldus verkrijgt men dus de in het rapport weergegeven formule

$$(4) \quad \frac{\alpha^2 y_n(t)}{\alpha t^2} + \omega_n^2 y_n(t) = \frac{p_n(t)}{\mu} \quad (4)$$

Het statische geval.

Beschouwen wij een statische belasting \bar{p}_n , dan is y geen functie meer van t . Vergelijking (4) gaat dan dus over in:

$$0 + \omega_n^2 y_n = \frac{\bar{p}_n}{\mu} \quad \text{of:} \quad y_n = \frac{\bar{p}_n}{\mu \omega_n^2} \quad (\text{III-f})$$

De vergelijkingen (2) en (3) zijn voor het statische belastinggeval:

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin \frac{n\pi x}{l} \\ p(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-g})$$

Bijlage IV.

Oplossing van verg. (4) voor $p_n(t) = \hat{p}_n \sin W_0 t$
(Resonantieverschijnsel)

Voor de belasting $p_n(t) = \hat{p}_n \sin W_0 t$ wordt
verg. (4):

$$\frac{\alpha^2 y_n}{\alpha t^2} + W_n^2 y_n = \frac{\hat{p}_n}{\alpha} \sin W_0 t \quad (IV-a)$$

De algemene oplossing van deze vergelijking is de algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking $(\frac{\alpha^2}{\alpha} y_n + W_n^2 y_n = 0)$ plus een bijzondere oplossing van vergelijking (IV-a).

Voor deze bijzondere oplossing mag een willekeurige oplossing van (IV-a) worden gekozen:

De algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking wordt ook wel "complementaire oplossing" genoemd.

Bijzondere oplossing.

Wij zoeken voor de willekeurige bijzondere oplossing een oplossing van de gedaante:

$$y_n = A_1 \sin W_0 t + B_1 \cos W_0 t$$

Dan is

$$\frac{\alpha^2 y_n}{\alpha t^2} = -W_0^2 A_1 \sin W_0 t - W_0^2 B_1 \cos W_0 t$$

Substitueren wij dit in (IV-a), dan verkrijgen wij:

$$-W_0^2 A_1 \sin W_0 t - W_0^2 B_1 \cos W_0 t + W_n^2 A_1 \sin W_0 t + W_n^2 B_1 \cos W_0 t = \frac{\hat{p}_n}{\alpha} \sin W_0 t$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} -W_0^2 A_1 + W_n^2 A_1 &= \frac{\hat{p}_n}{\alpha} \\ -W_0^2 B_1 + W_n^2 B_1 &= 0 \end{aligned}$$

of: $A_1 = \frac{\hat{p}_n}{\alpha W_n^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{W_0}{W_n})^2}$ en $B_1 = 0$ (tenzij $W_0 = W_n$)

Hieruit volgt dus de bijzondere oplossing:

$$y_n(t) = \frac{\hat{p}_n}{\alpha W_n^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{W_0}{W_n})^2} \sin W_0 t \quad (IV-b)$$

Deze bijzondere oplossing stelt de z.g. gedwongen trilling voor. Zoals in het rapport op pag. 5 werd uiteengezet, is het redelijk om als beginvoorwaarden in te voeren:

$$\left. \begin{aligned} y_n(t) &= 0 \quad \text{voor } t=0 \\ \frac{\alpha y_n}{\alpha t} &= 0 \quad \text{voor } t=0 \end{aligned} \right\} \quad (IV-c)$$

De gevonden bijzondere oplossing voldoet wel aan de eerste, doch niet aan de 2e beginvoorwaarde.

Ten tijde t is nl. $\frac{\alpha y_n}{\alpha t}(t) = \frac{\hat{p}_n W_0}{\alpha W_n^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{W_0}{W_n})^2}$

Complementaire oplossing.

Zoeken wij nu een oplossing van de gereduceerde vergelijking (complementaire oplossing), welke voldoet aan de beginvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} y_n(t) &= 0 \quad \text{voor } t=0 \\ \frac{\alpha y_n}{\alpha t}(t) &= -\frac{\hat{p}_n W_0}{\alpha W_n^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{W_0}{W_n})^2} \quad \text{voor } t=0 \end{aligned} \right\} \quad (IV-d)$$

dan zal de som van de bijzondere en de complementaire oplossingen (ofwel de volledige oplossing van verg. IV-a) wel voldoen aan de beginvoorwaarden sub (IV-c).

De complementaire oplossing moet voldoen aan:

$$\frac{d^2 y_m}{dt^2} + \omega_m^2 y_m = 0 \quad (\text{IV-e})$$

Stel $y = C e^{rt}$

Door substitutie hiervan in (IV-e) vindt men:

$$r^2 + \omega_m^2 = 0 \quad \text{of } r_1 = +i\omega_m \quad \text{en } r_2 = -i\omega_m$$

De algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking is dus:

$$y_n = A_2 \sin \omega_m t + B_2 \cos \omega_m t \quad (\text{IV-f})$$

De beginvoorwaarden sub (IV-d) geven resp:

$$B_2 = 0$$

$$A_2 = -\frac{\omega_0}{\omega_m} \cdot \frac{\dot{y}_n(0)}{\omega_m} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_m}\right)^2}$$

De volledige oplossing voor de beginvoorwaarden (IV-c) luidt dus:

$$y_n(t) = \frac{\dot{y}_n(0)}{\omega_m} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_m}\right)^2} \left\{ \sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega_m} \sin \omega_m t \right\} \quad (5)$$

Zou men andere beginvoorwaarden willen invoeren, zoals bijvoorbeeld $y_n(0)$ en $\frac{dy_n}{dt}(0)$, dan zou men dus vinden:

$$B_2 = y_n(0) \quad \text{en} \quad A_2 = -\frac{\omega_0}{\omega_m} \cdot \frac{\dot{y}_n(0)}{\omega_m} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_m}\right)^2} + \frac{1}{\omega_m} \cdot \frac{dy_n}{dt}(0)$$

De volledige oplossing voor willekeurige beginvoorwaarden kan dus als volgt worden geschreven:

$$y_n(t) = \frac{\dot{y}_n(0)}{\omega_m} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_m}\right)^2} \left\{ \sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega_m} \sin \omega_m t \right\} + y_n(0) \cos \omega_m t + \frac{1}{\omega_m} \cdot \frac{dy_n}{dt}(0) \sin \omega_m t \quad (\text{IV-g})$$

Bijlage V.

Oplossing van verg. nr. 4 voor de plotseling aangrijpende en plotseling eindigende belasting.

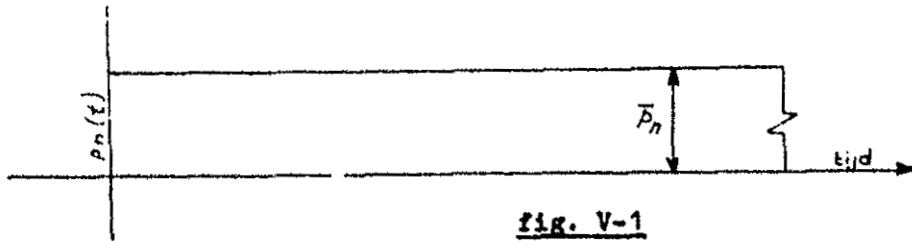


fig. V-1

Wij beschouwen eerst een plotseling aangrijpende belasting, die dan onbepaald aanhoudt.
De oplossing verloopt analoog aan die van bijlage IV.

$$\begin{aligned} \text{Voor } t < 0 \text{ geldt: } p_n(t) &= 0 \\ \text{Voor } t > 0 \text{ geldt: } p_n(t) &= \bar{p}_n \end{aligned}$$

Verg. (4) gaat dan voor $t \geq 0$ dus over in:

$$\frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 y_n(t) = \frac{\bar{p}_n}{\mu} \quad \text{---} \quad \text{(V-a)}$$

Bijzondere oplossing.

Wij zoeken voor de willekeurige bijzondere oplossing een oplossing van de gedaante:

$$y_n(t) = A_1 t^2 + B_1 t + C_1$$

Substitueert men dit in (IV-a), dan wordt gevonden:

$$2 A_1 + \omega_n^2 A_1 t^2 + \omega_n^2 B_1 t + \omega_n^2 C_1 = \frac{\bar{p}_n}{\mu}$$

Hieruit volgt:

$$2 A_1 + \omega_n^2 C_1 = \frac{\bar{p}_n}{\mu}$$

$$A_1 = 0$$

$$B_1 = 0 \quad \text{of: } A_1 = B_1 = 0 \quad \text{en } C_1 = \frac{\bar{p}_n}{\mu \omega_n^2}$$

De bijzondere oplossing is dus:

$$y_n(t) = \frac{\bar{p}_n}{\mu \omega_n^2}$$

Stelt men weer als beginvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} y_n(t) &= 0 \quad \text{voor } t = 0 \\ \text{en } \frac{dy_n(t)}{dt} &= 0 \quad \text{voor } t = 0 \end{aligned} \right\} \text{---} \quad \text{(V-b)}$$

dan volgen hieruit weer de beginvoorwaarden voor de: complementaire oplossing

Deze zijn:

$$\left. \begin{aligned} y_n(t) &= -\frac{\bar{p}_n}{\mu \omega_n^2} \quad \text{voor } t = 0 \\ \text{en } \frac{dy_n(t)}{dt} &= 0 \quad \text{" " " } \end{aligned} \right\} \text{---} \quad \text{(V-c)}$$

In bijlage nr. IV was als algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking reeds gevonden:

$$y_n(t) = A_2 \sin \omega_n t + B_2 \cos \omega_n t \quad \text{---} \quad \text{(V-d)}$$

Substitutie van de beginvoorwaarden (V-c) in (V-d) geeft dan:

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{p}_n}{\mu \omega_n^2} &= B_2 \\ 0 &= A_2 \end{aligned}$$

De volledige oplossing voor de sub (V-b) genoemde randvoorwaarden is dus:

$$y_n(t) = \frac{\bar{F}_n}{\mu \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) \text{ ----- (15)}$$

Wenst men ook hier andere randvoorwaarden in te voeren zoals bijv. $y_n(0)$ en $\frac{dy_n}{dt}(0)$, dan worden:

$$B_2 = -\frac{\bar{F}_n}{\mu \omega_n^2} + y_n(0) \quad \text{en} \quad A_2 = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{dy_n}{dt}(0)$$

De volledige oplossing kan dus als volgt worden geschreven:

$$y_n(t) = \frac{\bar{F}_n}{\mu \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) + y_n(0) \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{dy_n}{dt}(0) \cdot \sin \omega_n t \quad \text{(V-e)}$$

Met behulp van deze formules kan nu ook het in onderstaande schets woergegeven geval worden opgelost (d.w.z. een belasting, die plotseling aangrijpt in $t = 0$ en plotseling eindigt in $t = 2\tau$. Het plotselinge einde van de belasting ten tijde $t = 2\tau$ kan nl. in rekening worden gebracht, door op de reeds aanwezige belasting (\bar{F}_n) een in omgekeerde richting werkende belasting ($-\bar{F}_n$) te superponeren.

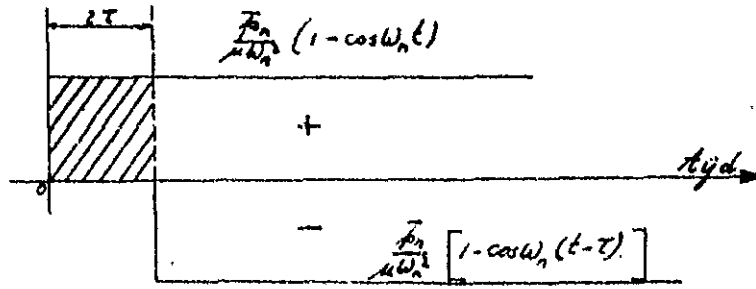


fig. V-2

Voor de randvoorwaarden sub (V-b) geldt dan:

voor $t < 0$: $y_n(t) = 0$ (14)

voor $0 < t < 2\tau$: $y_n(t) = \frac{\bar{F}_n}{\mu \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t)$ (15)

voor $t > 2\tau$: $y_n(t) = \frac{\bar{F}_n}{\mu \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t - 1 + \cos \omega_n (t - 2\tau))$ (V-f)

Werken wij de laatste formule verder uit, dan verkrijgen wij:

$$y_n(t) = \frac{\bar{F}_n}{\mu \omega_n^2} \{ \cos \omega_n (t - 2\tau) - \cos \omega_n t \} \text{ ----- (V-g)}$$

of: $y_n(t) = \frac{\bar{F}_n}{\mu \omega_n^2} \{ -2 \sin(t - \tau) \omega_n \sin -\omega_n \tau \}$

of: $y_n(t) = \frac{2\bar{F}_n}{\mu \omega_n^2} \sin \omega_n \tau \sin \omega_n (t - \tau) \text{ ----- (16)}$

Bijlage VI.

Oplossing van verg. (4) voor een lineair aangroeiende en afnemende
belasting.

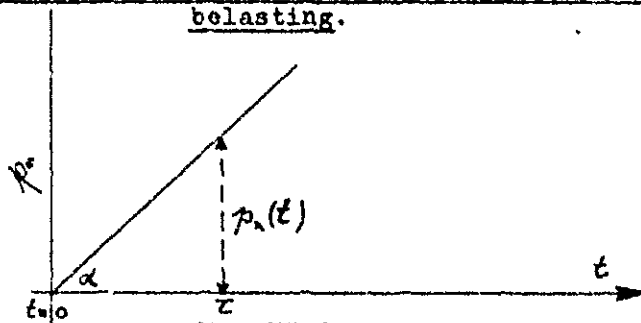


fig. VI-1

De oplossing verloopt analoog aan die van bijlage IV en V. Voor $t \rightarrow 0$ geldt:

$$p_n(t) = t \cdot \mu g \alpha = t \cdot \frac{d p_n}{d t}$$

Verg. 4 gaat dan dus over in:

$$\frac{d^2 y_n(t)}{d t^2} + \omega_n^2 y_n(t) = \frac{t}{\mu} \mu g \alpha \quad \text{--- (VI-a)}$$

Bijzondere oplossing:

Wij zoeken een bijzondere oplossing van de gedaante:

$$y_n(t) = A_1 t^2 + B_1 t + C_1$$

Substitueert men dit in (VI-a), dan wordt gevonden:

$$2 A_1 + \omega_n^2 A_1 t^2 + \omega_n^2 B_1 t + \omega_n^2 C_1 \equiv \frac{\mu g \alpha}{\mu} \cdot t$$

Hieruit volgt:

$$\omega_n^2 B_1 = \frac{\mu g \alpha}{\mu} \quad \text{of} \quad B_1 = \frac{\mu g \alpha}{\mu \omega_n^2}; \quad A_1 = 0; \quad C_1 = 0$$

De bijzondere oplossing is dus:

$$y_n(t) = \frac{\mu g \alpha}{\mu \omega_n^2} \cdot t$$

Stelt men weer als beginvoorwaarden voor de totale oplossing:

$$\left. \begin{aligned} y_n(t) &= 0 \quad \text{voor } t = 0 \quad \text{---} \\ \frac{d y_n(t)}{d t} &= 0 \quad \text{voor } t = 0 \quad \text{---} \end{aligned} \right\} \text{--- (VI-b)}$$

, dan volgen hieruit de beginvoorwaarden voor de
complementaire oplossing:

$$\left. \begin{aligned} y_n(t) &= 0 \quad \text{voor } t = 0 \quad \text{---} \\ \frac{d y_n(t)}{d t} &= -\frac{\mu g \alpha}{\mu \omega_n^2} \quad \text{voor } t = 0 \quad \text{---} \end{aligned} \right\} \text{--- (VI-c)}$$

In bijlage nr. IV was als algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking reeds gevonden:

$$y_n(t) = A_2 \sin \omega_n t + B_2 \cos \omega_n t \quad \text{--- (VI-d)}$$

Substitutie van de beginvoorwaarden (VI-c) en (VI-d) geeft dus:

$$\begin{aligned} B_2 &= 0 \\ A_2 &= -\frac{\mu g \alpha}{\mu \omega_n^3} \end{aligned}$$

De volledige oplossing voor de sub (VI-b) genoemde beginvoorwaarden is dus:

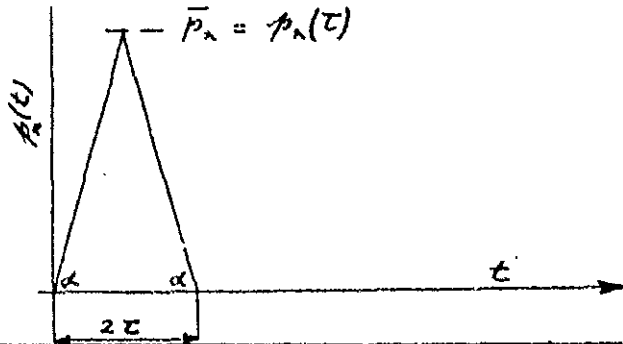
$$y_n(t) = \frac{t \cdot \text{tg } \alpha}{h \omega_n^2} \left(1 - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t} \right) \text{----- (VI-e)}$$

Ook hier geldt natuurlijk weer, dat men bij invoeren van andere beginvoorwaarden als volledige oplossing zou verkrijgen:

$$y_n(t) = \frac{t \cdot \text{tg } \alpha}{h \omega_n^2} \left(1 - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t} \right) + y_n(0) \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \frac{dy_n(0)}{dt} \sin \omega_n t$$

, waarin $\text{tg } \alpha = \frac{d\bar{p}_n}{dt} = \frac{\bar{p}_n(\tau)}{\tau}$ ----- (VI-f)

Met behulp van (VI-e) kan nu ook het in onderstaande figuur weergegeven geval worden opgelost:



voor $0 < t < \tau$ geldt: dan: $(\text{tg } \alpha = \frac{\bar{p}_n}{\tau})$

$$y_n(t) = \frac{t \cdot \bar{p}_n}{\tau h \omega_n^2} \left(1 - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t} \right) \text{----- (VI-g)}$$

Voor $\tau < t < 2\tau$ geldt:

$$p_n(t) = \left(2 - \frac{t}{\tau} \right) \frac{\bar{p}_n}{h} \text{ of voor } t' = t - \tau : p_n(t') = \left(1 - \frac{t'}{\tau} \right) \frac{\bar{p}_n}{h}$$

De beginvoorwaarden voor $t = \tau$ of $t' = 0$ volgen uit (VI-g).

Deze zijn:

$$\left. \begin{aligned} y_n(\tau) &= \frac{\bar{p}_n}{h \omega_n^2} \left(1 - \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \tau} \right) \text{-----} \\ \frac{dy_n(\tau)}{dt} &= \frac{\bar{p}_n}{h \omega_n^2} \left(1 - \cos \omega_n \tau \right) \text{-----} \end{aligned} \right\} \text{----- (VI-h)}$$

Zoeken wij nu eerst de bijzondere oplossing van de gedaante: $y_n(t) = A t' + B$, $t + C$, dan vinden wij:

$$y_n(t') = \frac{\bar{p}_n}{h} \left(1 - \frac{t'}{\tau} \right) \text{----- (VI-i)}$$

Voor $t' = 0$ of $t = \tau$ is dan:

$$y_n(\tau) = \frac{\bar{p}_n}{h \omega_n^2} \text{ en } \frac{dy_n(\tau)}{dt} = - \frac{\bar{p}_n}{h \omega_n^2 \tau}$$

De beginvoorwaarden voor de complementaire oplossing worden dan dus: (zie VI-h).

$$\left. \begin{aligned} y_n(\tau) &= - \frac{\bar{p}_n}{h \omega_n^2} \cdot \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \tau} \text{ en -----} \\ \frac{dy_n(\tau)}{dt} &= \frac{\bar{p}_n}{h \omega_n^2} (2 - \cos \omega_n \tau) \text{-----} \end{aligned} \right\} \text{----- (VI-j)}$$

De algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking is:

$$y_n(t') = A_2 \sin \omega_n t' + B_2 \cos \omega_n t'$$

Na invoeren van de sub (VI-j) genoemde beginvoorwaarden volgt hieruit:

$$B_2 = - \frac{\bar{p}_n}{h \omega_n^2} \cdot \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \tau} \text{ en}$$

$$A = \frac{\bar{p}_n}{h \omega_n^3 \tau} (2 - \cos \omega_n \tau)$$

De volledige oplossing wordt dus:

$$y_n(t') = \frac{\bar{p}_n}{h\omega_n^2} \left[1 - \frac{t'}{\tau} + \frac{(2 - \cos \omega_n \tau)}{\omega_n \tau} \sin \omega_n t' - \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \tau} \cos \omega_n t' \right]$$

of:

$$y_n(t) = \frac{\bar{p}_n}{h\omega_n^2} \left[2 - \frac{t}{\tau} + \frac{2 - \cos \omega_n \tau}{\omega_n \tau} \sin \omega_n (t - \tau) - \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \tau} \cos \omega_n (t - \tau) \right] \quad \text{--- (VI-k)}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dy_n(t)}{dt} = \frac{\bar{p}_n}{h\omega_n^2} \left[-\frac{1}{\tau} + \frac{(2 - \cos \omega_n \tau)}{\omega_n \tau} \cdot \omega_n \cdot \cos \omega_n (t - \tau) + \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \tau} \cdot \omega_n \cdot \sin \omega_n (t - \tau) \right] \quad \text{--- (VI-l)}$$

Ten tijde $t = 2\tau$ is dus:

$$y_n(2\tau) = \frac{2\bar{p}_n}{h\omega_n^2} \cdot \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \tau} (1 - \cos \omega_n \tau) \quad \text{--- (VI-m)}$$

en:

$$\frac{dy_n(2\tau)}{dt} = \frac{\bar{p}_n}{h\omega_n^2} \cdot \frac{2 \cos \omega_n \tau (1 - \cos \omega_n \tau)}{\omega_n \tau} \quad \text{--- (VI-n)}$$

VI-m en VI-n vormen weer de beginvoorwaarden voor de verdere trilling van de balk.

Voor $t > 2\tau$ is er geen belasting meer, zodat dan de algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking geldt. Hiervoor was gevonden:

$$y(t) = A_2 \sin \omega_n t + B_2 \cos \omega_n t, \quad \text{waarin } t'' = t - 2\tau$$

Substitueren wij (VI-m) en (VI-n) als beginvoorwaarden in deze vergelijking, dan volgt hieruit:

$$B_2 = \frac{2\bar{p}_n}{h\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n \tau) \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \tau}, \quad A_2 = \frac{2\bar{p}_n}{h\omega_n^2} \frac{1}{\omega_n \tau} \cdot \cos \omega_n \tau (1 - \cos \omega_n \tau)$$

, zodat de oplossing voor $t > 2\tau$ wordt:

$$y_n(t) = \frac{2\bar{p}_n}{h\omega_n^2} \left[\frac{1}{\omega_n \tau} \cdot \cos \omega_n \tau (1 - \cos \omega_n \tau) \cdot \sin \omega_n (t - 2\tau) + \frac{\sin \omega_n \tau (1 - \cos \omega_n \tau)}{\omega_n \tau} \cos \omega_n (t - 2\tau) \right]$$

of:

$$y_n(t) = \frac{2\bar{p}_n}{h\omega_n^2} \cdot \frac{(1 - \cos \omega_n \tau)}{\omega_n \tau} \cdot \sin \omega_n (t - \tau) \quad \text{--- (22)}$$

geldig voor $t > 2\tau$

Samenvatting.

Met het doel enig inzicht te verkrijgen in de spanningsverdelingen, die door golfaanval in de Haringvlietsluizen kunnen worden opgewekt, worden in dit rapport enige beschouwingen gegeven over de vormveranderingen van een op twee steunpunten opgelegde balk onder invloed van verschillende dynamische belastingen. In de laatste paragraaf wordt bovendien nagegaan aan welke eisen bij het modelonderzoek, dat in het Waterloopkundig Laboratorium wordt uitgevoerd, moet worden voldaan.

De conclusies, die uit één en ander kunnen worden getrokken zijn de volgende:

1. Als gevolg van golfaanval (staande golf) zullen in de Haringvlietsluizen geen noemenswaardige resonantieverschijnselen optreden, omdat de grootste periode van de eigen trillingen der constructie kleiner is dan $1/5$ seconde.
2. Impulsieve belastingen mogen slechts staticch in rekening worden gebracht, indien daarbij een doelmatige stootcoëfficiënt wordt ingevoerd. Met behulp van de in fig.9 weergegeven grafiek kan deze worden bepaald.
3. Bij het experimentele onderzoek moet voor wat betreft perioden van de eigen trillingen en de massa van de modellen aan bepaalde eisen worden voldaan.

Uittreksel.
uit het rapport

Dynamische verschijnselen als gevolg van golfaanval op de
Haringvlietsluizen.

1. Algemeen.

De golfbelasting, die bij het dimensioneren van de Haringvlietsluizen in rekening moet worden gebracht, heeft een uitgesproken dynamisch karakter.

De voornaamste consequenties hiervan zijn:

- a. Resonantieverschijnselen, die door een periodieke belasting kunnen worden opgewekt (zie fig.1; slaande golf)
- b. Bij impulsieve belastingen (zie fig.2) worden de vervormingen en daarmee de spanningsverdeling bepaald door traagheidskrachten.

Het is algemeen bekend, dat door een periodieke belasting resonantieverschijnselen kunnen ontstaan, die gevaarlijker zijn, naarmate de verhouding tussen de periode van de uitwendige belasting (T_b) en de periode van de gevaarlijkste eigen trilling van de constructie (T_1) dichter nadert tot 1.

In par.3 wordt hier nader op ingegaan.

Het belastinggeval van fig.2 heeft een min of meer impulsief karakter, waardoor traagheidskrachten het verschijnsel zullen gaan beheersen. De belasting grijpt vrijwel ogenblikkelijk aan en is weer gereduceerd tot nul, voordat de constructie een noemenswaardige vormverandering heeft kunnen ondergaan. Bij het einde van de belasting heeft ieder deel van de constructie dus nog slechts een geringe uitwijking, doch wel een snelheid. De uiteindelijke spanningsverdeling wordt in dat geval derhalve bepaald door de mate, waarin de constructie onder de invloed van traagheidskrachten zal "doorschieten".

In par.4 wordt dit verschijnsel verder in beschouwing genomen.

Bij het onderzoek betreffende de golfaanval op de Haringvlietsluizen wordt een ruim gebruik gemaakt van modelproeven, die in het Waterloopkundig Laboratorium te Delft worden uitgevoerd. Hierbij worden vervormingen gemeten aan op schaal vervaardigde modellen van de sluisen. In par.5 wordt uiteengezet, aan welke eisen deze modellen moeten voldoen om de werkelijkheid zo goed mogelijk weer te geven.

De in dit rapport gegeven beschouwingen zijn voor de Haringvlietsluizen uitsluitend van toepassing, voorzover deze mogen worden opgevat als een balk, die op twee steunpunten is opgelegd.

2. De invloed van de wijze, waarop de belasting over de lengte van de sluis is verdeeld.

De te onderzoeken dynamische verschijnselen worden voor een groot deel beheerst door de waarde van de periode van de eigen trilling, die door een bepaalde belasting wordt opgewekt. Deze waarde (en dus het verschijnsel zelf) zal voor verschillende belastingverdelingen niet dezelfde zijn. Dit wordt duidelijk, indien men bijvoorbeeld fig. 3a vergelijkt met fig. 3b.

Voor het in fig. 3a weergegeven geval heeft de periode van de eigen trilling (T_1) een andere waarde dan voor het in fig. 3b weergegeven geval ($T_2 = 4 T_1$). In het laatste geval zal dus bijvoorbeeld resonantie optreden, wanneer de periode van de belasting T_b nadert tot $T_2 (= 4 T_1)$; in het eerste geval daarentegen wanneer T_b nadert tot T_1 . De belastingverdeling kan dus inderdaad een grote invloed hebben. Een algemeen geldende oplossing is dan ook slechts mogelijk, indien deze als een som van termen (met $T_1, T_2, T_3 \dots$ enz.) wordt geschreven*) (Fourrierreeks).

Afhankelijk van de belastingverdeling heeft dan iedere term, een bepaalde waarde. Gaat men dit voor verschillende gevallen na, dan zal gewoonlijk blijken, dat één term uit de reeks zeer veel groter is dan alle andere termen. Zo wordt het verschijnsel voor het in fig. 3a weergegeven belastinggeval zeer goed weergegeven, indien uitsluitend de eerste term wordt gebruikt, terwijl voor de in fig. 3b weergegeven belasting speciaal de 2e term van belang is.

In beginsel moet dus geval voor geval worden nagegaan welke (c.q. hoeveel) termen moeten worden gebruikt, om het verschijnsel naar behoren weer te geven.

- Voor -

*) Hiervoor wordt verwezen naar het volledige rapport.

Voor de meeste belastingverdelingen, die voor de praktijk van belang zijn, worden de dynamische verschijnselen echter reeds zeer goed weergegeven, indien uitsluitend de 1e term wordt gebruikt.

Eenvoudigheidshalve worden alle andere gevallen daarom in dit uittreksel buiten beschouwing gelaten. Hiervoor wordt verwezen naar het volledige rapport.

De beschouwingen die in de volgende paragrafen voorkomen, zijn dus slechts geldig voor belastingverdelingen, die bij benadering aanleiding geven tot de in fig.3a geschetste uitbuigingsvorm.

In het algemeen is dit het geval, wanneer geen in tegengestelde richting aangrijpende krachten werkzaam zijn.

3. Het Resonantieverschijnsel.

Een van de belastinggevallen waarmee rekening moet worden gehouden, is dat van een min of meer regelmatig periodiek verloop (zie fig.1).

Onder invloed van een dergelijke belasting kunnen in de constructie zeer hoge spanningen ontstaan, indien de periode van de belasting, niet voldoende afwijkt van die van de hierdoor opgewekte eigen trilling. Bij een constructie als de Haringvlietsluizen moet de periode van de eigen trilling daarom aan bepaalde eisen voldoen. Teneinde deze eisen nader te kunnen omschrijven wordt in deze paragraaf nagegaan, wat er gebeurt onder invloed van een sinusvormig verloopende belasting, die aanleiding geeft tot de in fig.3a geschetste uitbuigingsvorm.

In beginsel bestaat dan de beweging, die door een willekeurig punt van de constructie wordt beschreven uit 2 componenten nl. een gedwongen trilling, die als het ware de belasting "volgt" (zie de streepjes - lijn in fig.4) en een eigen trilling, die moet worden opgevat als een verstoringverschijnsel (zie de streepstip lijn in fig.4).

Dit verstoringverschijnsel ontstaat, indien de beginvoorwaarden niet zijn afgestemd op de gedwongen trilling. Na het betrekkelijk plotselinge begin van de belasting (zie de streeplijn in fig.4) kan de constructie nog niet direct "volgen", waardoor het genoemde verstoringverschijnsel ontstaat. Neemt men als beginvoorwaarden aan, dat de constructie ten tijde $t = 0$ geen snelheid en geen uitwijking heeft, dan is de grootste uitwijking van de verstoringstrilling $\frac{T_1}{T_b}$ maal zo groot als de grootste uitwijking van de gedwongen trilling, die op zijn beurt $\frac{1}{1 - (\frac{T_1}{T_b})^2}$ maal zo groot is als de "statische uitwijking (d.w.z. de uitwijking, die bij een even grote statische belasting (P_{max} dyn) zou ontstaan).

De allergrootste totale uitwijkingen (y_{max} dyn) kunnen dan $\frac{1}{1 - (\frac{T_1}{T_b})^2}$ maal zo groot worden als de "statische" uitwijkingen. De vergrotingsfactor $\frac{1}{1 - (\frac{T_1}{T_b})^2}$ werd in fig.5 weergegeven voor verschillende waarden van T_b bij $T_1 = 1/5$ seconde (Haringvlietsluizen).

Neemt men aan, dat de beginvoorwaarden wel op de gedwongen trilling zijn afgestemd*), dan komt de eigen trilling geheel te vervallen. Het dynamische effect wordt dan dus weergegeven door de vergrotingsfactor $\frac{1}{1 - (\frac{T_1}{T_b})^2}$ van de gedwongen trilling. Ook deze vergrotingsfactor werd in fig.5 weergegeven.

Welke van de beide vergrotingsfactoren moet worden gebruikt hangt dus af van de beginvoorwaarden, waarop men wenst te rekenen. Het lijkt redelijk om de eerstgenoemde beginvoorwaarden (met de bijbehorende vergrotingsfactor $(\frac{1}{1 - (\frac{T_1}{T_b})^2})$) als maatstaf aan te houden.

Indien $T_b \gg T_1$ mag men dus de grootste waarde van de dynamische belasting statisch in rekening brengen! De vergrotingsfactor wordt dan nagenoeg gelijk aan 1.

Indien T_b minder afwijkt van T_1 verkrijgt men door de superpositie van de gedwongen- en de verstorings trilling het typische resonantieverschijnsel, dat door fig.6 wordt weergegeven. De grootste uitwijkingen nemen dan afwisselend toe en af (zwevingen!)

Het tijdstip, waarop y_{max} dyn voor de eerste maal optreedt, zal later vallen, naarmate de verhouding $\frac{T_1}{T_b}$ dichter nadert tot 1.

De waarde van y_{max} dyn zelve neemt daarbij eveneens toe. Voor het extreme geval, nl. $T_b = T_1$, blijven de uitwijkingen met de tijd toenemen. Op het tijdstip $t = \infty$ zouden ze dan oneindig groot worden. De gebruikte formules zijn echter reeds lang voordien niet meer van toepassing.

Gaat men na wat dit alles betekent voor de Haringvlietsluizen, dan blijkt het volgende:

De als maatstaf aan te houden zeer hoge golven hebben een periode, die groter is dan 6 seconde. De verhouding $\frac{T_1}{T_b}$ zal dan dus zeker kleiner zijn dan 1/30. De invloed van de verstorings trilling is dan zeer gering, zodat men zich over de juistheid van de veronderstelde beginvoorwaarden geen zorgen behoeft te maken.

Bovendien is dan de vergrotingsfactor nagenoeg gelijk aan 1, zodat de constructie onder invloed van deze dynamische belasting vrijwel in een gedwongen trilling verkeert, waarvan de uitwijkingen op ieder moment vrijwel overeenkomen met de "statische" uitwijkingen onder invloed van de op dat moment aangrijpende belasting.

De constructie "volgt" als het ware de belasting. Deze conclusie geldt voor iedere belastingverdeling over de lengte van de sluis.

Met behulp van fig.5 kan verder worden nagegaan, in hoeverre de aanval van een lagere golf met een korte periode voor de Haringvlietsluizen gevaarlijker kan zijn dan een hoge golf met een lange periode. Het is immers denkbaar, dat de vergrotingsfactor $\frac{1}{1 - (\frac{T_1}{T_b})^2}$ voor kortere perioden zo groot wordt, dat de geringere waarde van y_{max} dyn (lage golf: zie fig.4) hierdoor ruimschoots wordt gecompenseerd.

- Beschouwt -

*) Dit is bijvoorbeeld mogelijk als gevolg van demping of van een langzaam aangroeien der golven uit een bepaalde golfgroep.

Beschouwt men fig.5, dan blijkt de vergrotingsfactor pas zeer sterk toe te nemen voor $1/5 \text{ sec} < T_b < \frac{1}{2} \text{ sec}$. De golven, die hiermede corresponderen zijn echter zó laag, dat deze niet maatgevend zullen zijn.

Op grond hiervan kon worden aangenomen, dat het modelonderzoek geen proeven met zeer korte en lage golven behoefde te omvatten.

Zoals uit het voorgaande blijkt, behoeft het resonantieverschijnsel uit een oogpunt van golfaanval bij de berekening van de Haringvlietsluizen (waarvoor $T_1 \leq 1/5 \text{ sec}$.) niet in beschouwing te worden genomen. In hoeverre resonantie door de werking van het stromende water (op de schuiven) tijdens spuien van belang kan worden, blijft voorshands een open vraag. Een nader onderzoek in deze richting lijkt zeker gewenst.

4. De plotseling aangrijpende en weer eindigende belasting.

Omdat gebleken is, dat onder bepaalde omstandigheden in werkelijkheid zeer hoge doch kortdurende drukstoten kunnen optreden dient naast de periodieke belasting, die in de vorige paragraaf werd besproken, ook een impulsieve belasting te worden beschouwd.

A priori is nl. niet bekend, in hoeverre dergelijke belastingen voor de Haringvlietsluizen gevaarlijk kunnen zijn.

Daarom wordt in deze paragraaf het gedrag van een op 2 steunpunten opgelegde balk onder invloed van het in fig.7 geschetste belastingverloop in beschouwing genomen.

Dit belastinggeval kan worden beschouwd als een uiterste. In werkelijkheid zal de belastingtoename met de tijd wel zeer snel, doch niet discontinus verlopen. Voor de invloed hiervan wordt verwezen naar het volledige rapport, waarin ook een driehoekig veropende belasting wordt beschouwd.

Wat er gebeurt, indien de constructie wordt onderworpen aan een plotseling aangrijpende belasting, wordt weergegeven door figuur 8.

Blijft de belasting na het plotselinge begin verder op de constructie staan, dan zal deze in een eigen trilling geraken, waarvan de uitwijkingen ten hoogste 2 maal zo groot zijn als de statische uitwijkingen*) (zie de getrokken lijn in fig.8). Bij een belastingverdeling, die bij benadering de in fig.3a weergegeven uitbuigingsvorm veroorzaakt, zullen deze grootste uitwijkingen resp. optreden ten tijde $t = \frac{1}{2} T_1, \frac{3}{2} T_1, \frac{5}{2} T_1$ ----- enz.

De constructie trilt dan om de evenwichtsstand, die door een even grote statische belasting zou ontstaan.

Eindigt de belasting op het tijdstip $t = \frac{1}{2} T_1$ (of op $t = \frac{3}{2} T_1$ of op $t = \frac{5}{2} T_1$ enz.), dan gaat deze trilling over in een eigen trilling om de rusttoestand van de constructie (rusttoestand = uitwijkingen nul). Indien geen demping zou optreden, blijven de grootste uitwijkingen ter weerszijden van de

- rusttoestand -

*) Statische uitwijkingen = de uitwijkingen, die zouden ontstaan, indien men dezelfde belasting niet plotseling doch geleidelijk zou laten aangrijpen.

rusttoestand dan 2 maal de statische (zie de puntstreeplijn in fig.8).

Eindigt de belasting op een ander tijdstip, dan ontstaat ook een eigen trilling om de rusttoestand. De grootste uitwijkingen zijn dan echter kleiner dan 2 maal de statische uitwijkingen. In figuur 8 wordt dit weergegeven voor het geval, dat de belasting eindigt in C (zie de stippellijn in fig.8). Practisch komt het er dus op neer, dat bij de (statische) berekening een stootcoëfficiënt 2 moet worden ingevoerd, voor impulsieve belastingen, die langer duren dan $\frac{1}{2} T_1$ seconde*) ($2\tau > \frac{1}{2} T_1$). Duurt de belasting korter, dan kan met een kleinere stootcoëfficiënt worden volstaan. Voor $2\tau < \frac{1}{6} T_1$ zou men zelfs te veilig zijn, indien de grootste waarde van de impulsieve belasting statisch in rekening zou worden gebracht. In dat geval moet dus een stootcoëfficiënt worden gebruikt, die kleiner is dan 1. In fig.9 wordt een en ander nog eens grafisch voorgesteld. De stootcoëfficiënt, die voor verschillende waarden van 2τ moet worden gebruikt, kan hieruit direct worden afgelezen. Voor de Nabla-liggers van de Haringvlietsluizen kan dus voor impulsieve belastingen worden aangehouden:

- Een stootcoëfficiënt 2 , indien $2\tau > 1/10$ sec.
- Een stootcoëfficiënt 1 à 2, indien $1/30$ sec $< 2\tau < 1/10$ sec.
(af te lezen uit fig.9)
- Een stootcoëfficiënt 1 , indien $2\tau < 1/30$ sec. (af te lezen uit fig.9)

(2τ = tijdsduur der impulsieve belasting).

5. Modelproeven.

Bij het experimentele onderzoek naar de golfaanval op de Haringvlietsluizen werden 3 methoden gevolgd, nl.:

- a. Het meten van de uitwendige belasting door middel van instrumenten, die op een volkomen stijf model zijn geplaatst.
- b. Het meten van vervormingen (uitwijkingen) aan een geschematiseerd model (massa-verensysteem).
- c. Het meten van vervormingen (uitwijkingen en wringing) aan een op schaal vervaardigd model.

De eerstgenoemde methode werd in eerste instantie wel toegepast, doch later weer verlaten, omdat de resultaten een zeer grote spreiding vertoonden. De uitkomsten van deze proeven zullen vermoedelijk niet meer worden gebruikt.

Bij toepassing van de beide andere methoden moeten de modellen de bewegingen van het prototype op schaal weergeven. Daartoe moeten zij aan zeer bepaalde eisen voldoen.

Deze kunnen worden afgeleid uit de bewegingsvergelijkingen, die voor de op 2 steunpunten opgelegde balk werden afgeleid nl.:

$$\text{voor het geval van buiging: } \frac{d^2 y_n}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_n^2} y_n = \frac{P_n}{\mu} \quad (1)$$

$$\text{voor het geval van wringing: } \frac{d^2 \varphi_n}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_{wn}^2} \varphi_n = \frac{M_n}{J_{mp}} \quad (2)$$

De termen p_n en m_n vertegenwoordigen in deze formules de uitwendig aangrijpende belastingen. Deze worden bij het experimentele onderzoek zo goed mogelijk op schaal weergegeven. Hieruit volgt direct, dat de te meten grootheden y_n en φ_n , die resp. de uitbuiging en de hoekverdraaiing weergegeven, met die van het prototype overeen zullen komen, indien:

- I. De perioden T_n en T_{wn} van de eigen trillingen op schaal zijn gerealiseerd.
- II. De massa per lengte-eenheid μ en het massa-traagheidsmoment I_{mp} op schaal zijn weergegeven.

Bij toepassing van de sub b genoemde methode, stelt de massa van het massa-verensysteem een "moot" van de constructie voor. Deze massa voldoet aan de bewegingsvergelijking:

$$\text{massa-verensysteem: } \frac{\alpha^2 y}{\alpha t^2} + \frac{4\pi^2}{T_0^2} y = \frac{K(t)}{m} \quad (3)$$

- , waarin y = de uitwijking
 $T_0 = 2\pi/\sqrt{mc}$ = de periode van de eigen trilling van het systeem
 $K(t)$ = de op de massa werkende kracht als functie van de tijd.
 m = de massa van het systeem.
 C = de veerconstante

Vergelijkt men nu de formules 1 en 3, dan kunnen hieruit de modelwetten worden afgeleid. Gaat men er daarbij van uit, dat de belasting die in het model op de massa wordt uitgeoefend, in het prototype over de volle lengte van de sluis zal aangrijpen, dan blijken de uitwijkingen van de massa op schaal $4/\pi$ maal zo groot te zijn als die in het midden van de sluis, indien:

- I de eigen trillingstijd van het massa-verensysteem (T_0) op schaal overeenkomt met de grootste eigen trillingstijd (T_1) van het prototype.
- II de massa van het systeem op schaal gelijk is aan de massa van de "moot" van de sluis, die door het model wordt voorgesteld.

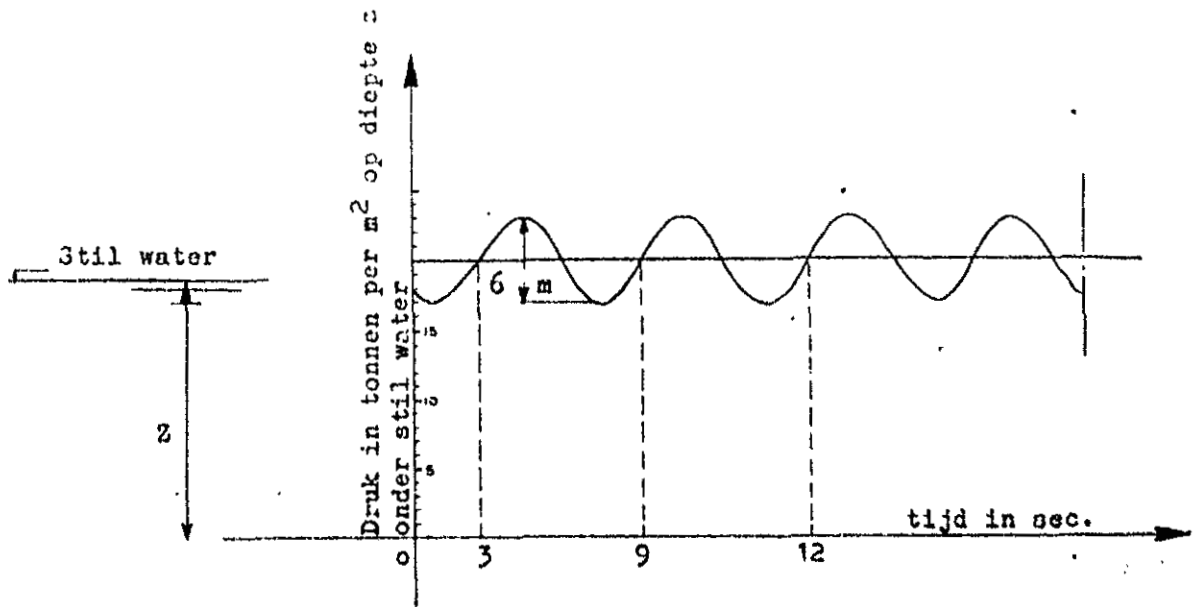


fig. 1

Schema van de belasting op een verticale wand bij volledige terugkaatsing van een golf van 3 m hoogte (top tot dal) en $T = 6$ sec.

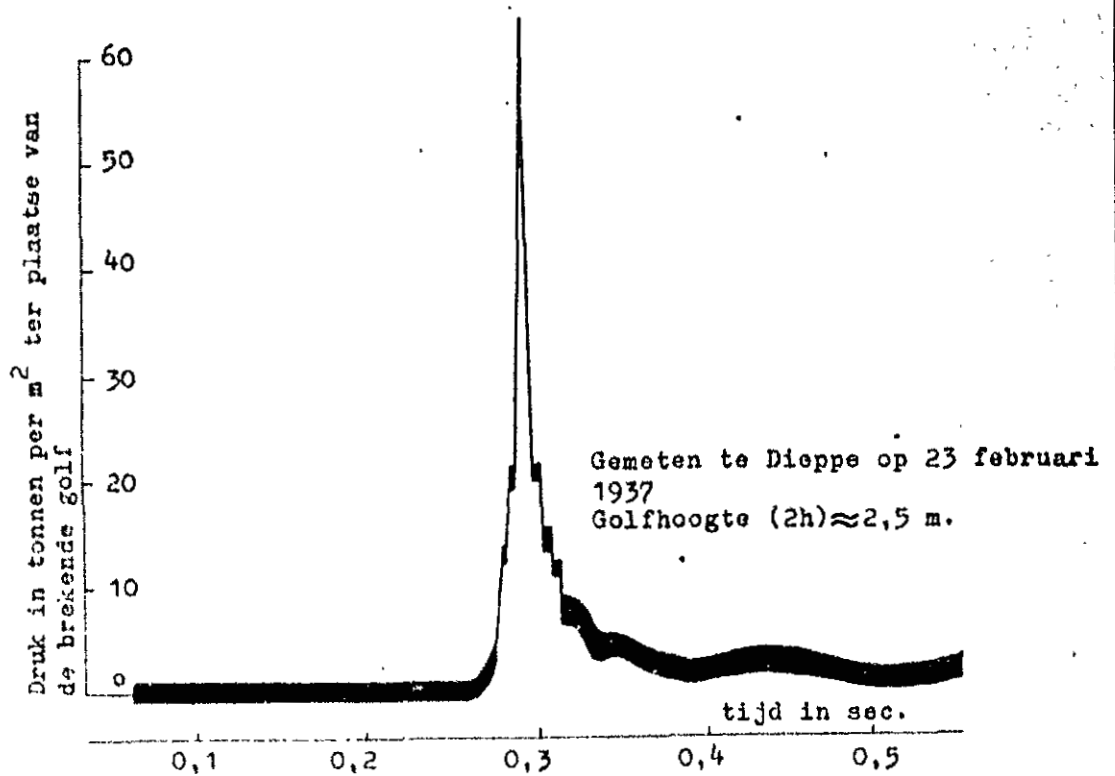


fig. 2

Schema van de belasting op een verticale wand bij brekingsverschijnselen.

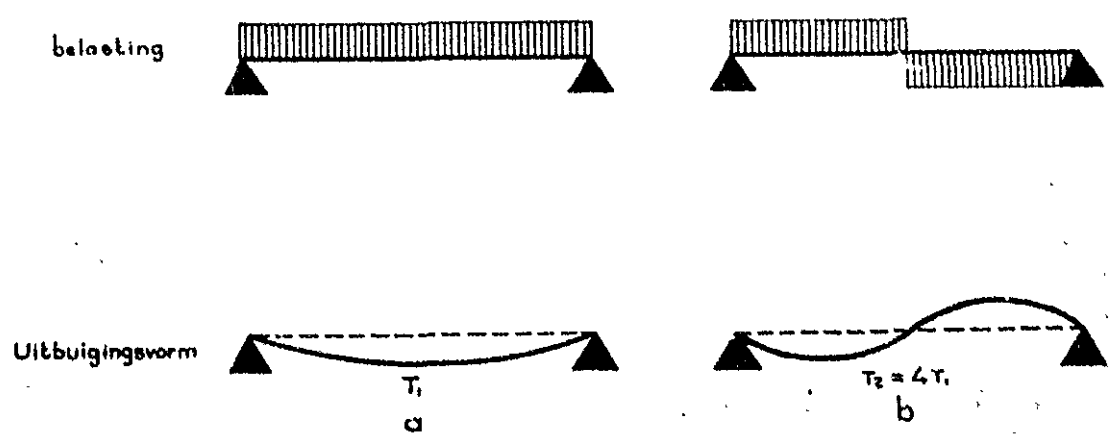


fig. 3.

Uitbuigingsvormen.

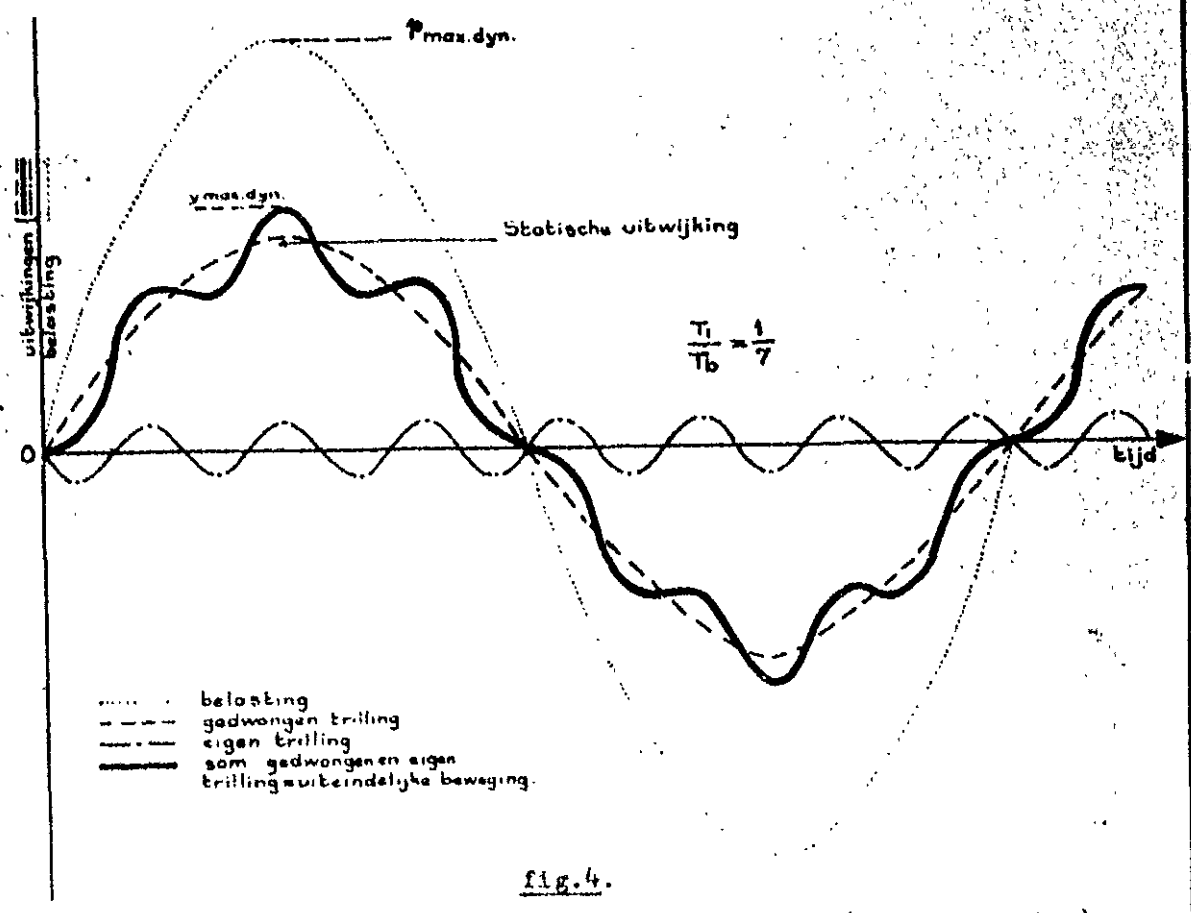
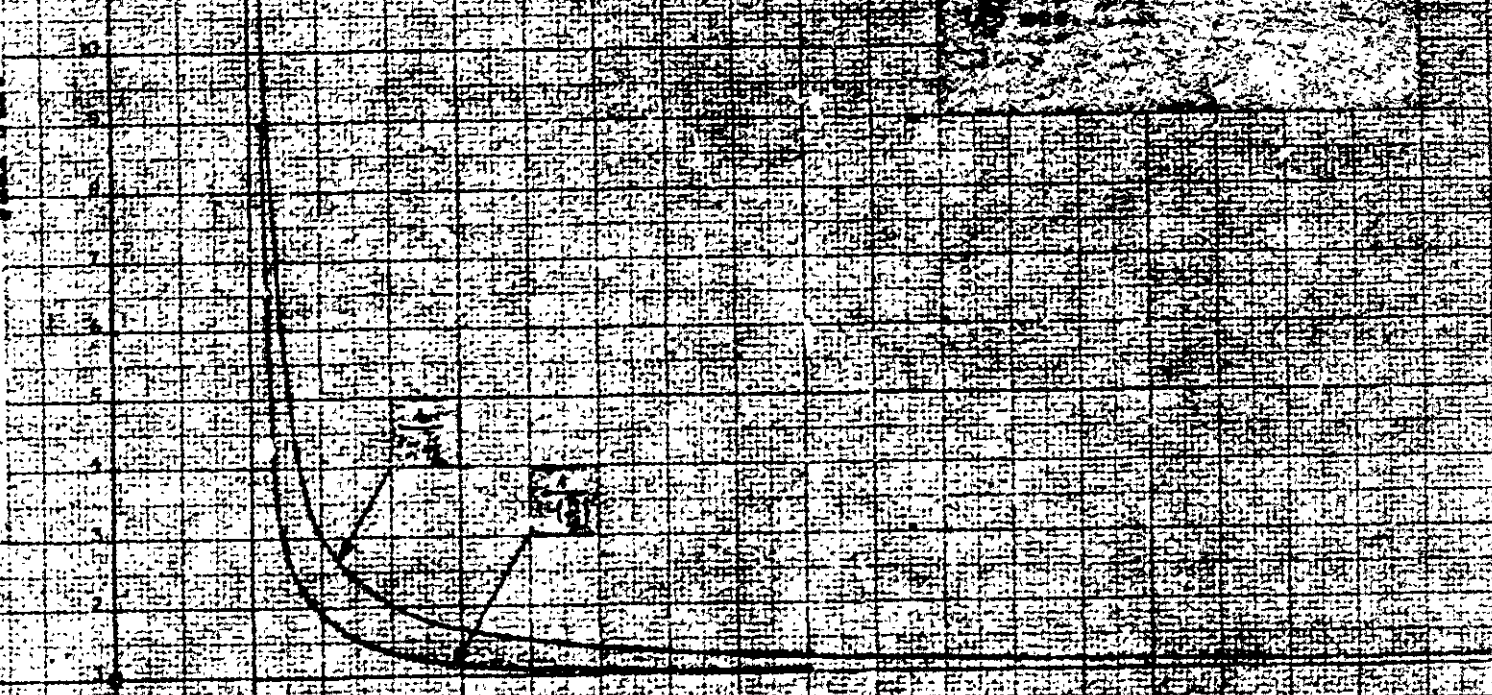


fig. 4.

Uitwijking als functie van de tijd (zonder demping)

Ver grotingsfactor $\gamma_{max dyn}$

$\gamma_{max stat}$



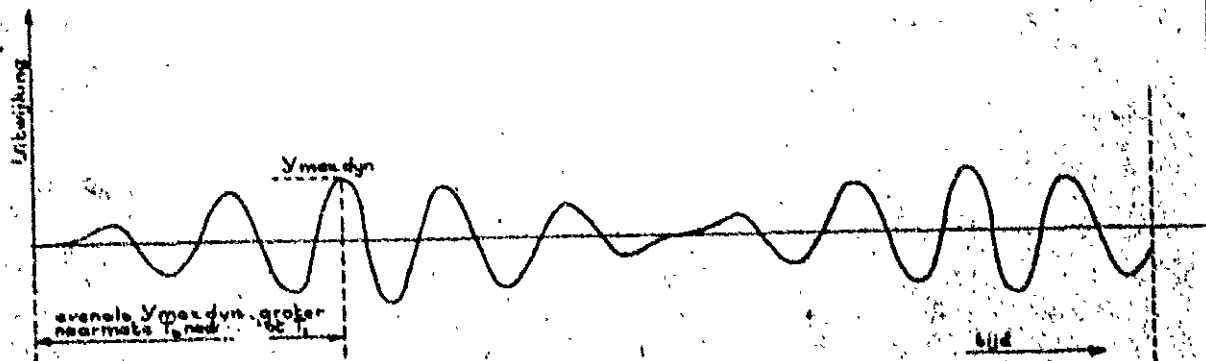


Fig. 6.
Resonantie.

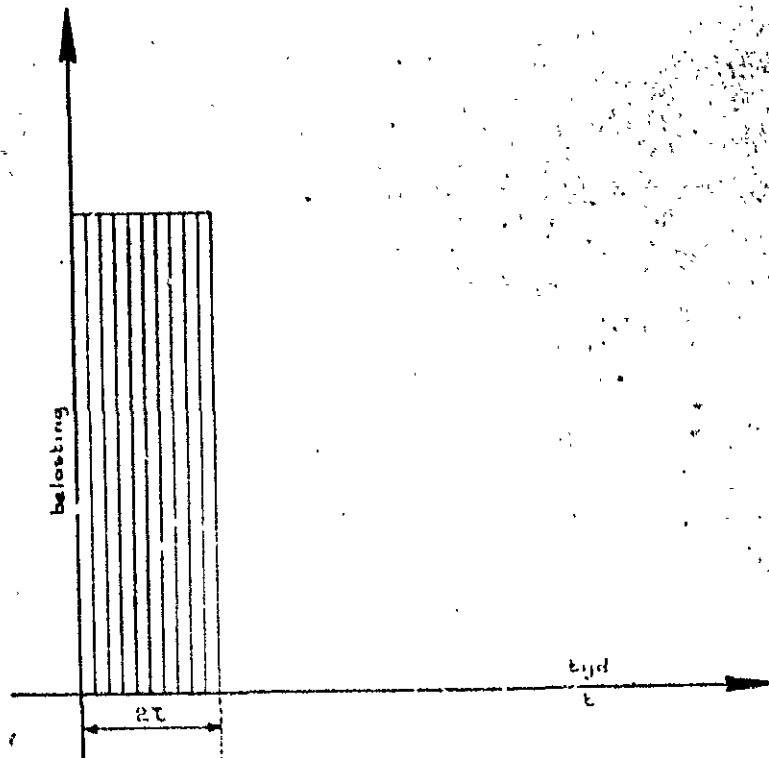


Fig. 7.
Belastingchema.

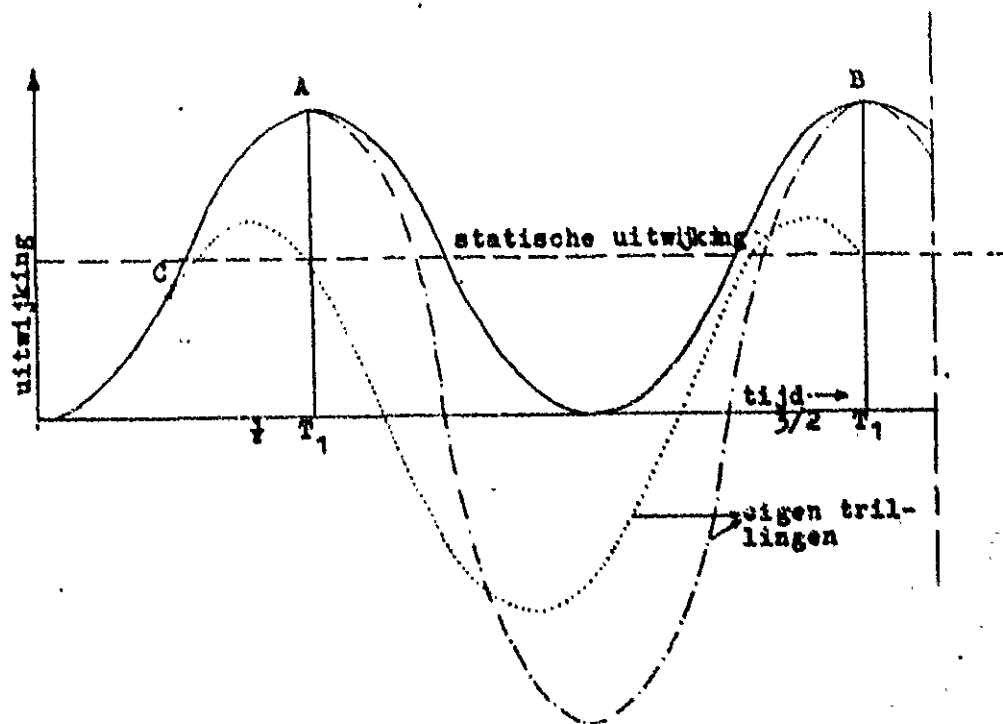


fig.8

Uitwijkingen als functie van de tijd bij een plotseling aangrijpende en eindigende belasting.

- Indien belasting blijft ($2T > 3/2 T_1$)
- Indien belasting eindigt op tijdstip $t = 1/5 T_1$ (d.w.z. in C; $2T = 1/5 T_1$)
- .-.- Indien belasting eindigt op tijdstip $t = 1/2 T_1$ (d.w.z. in A).
- Statische uitwijking.

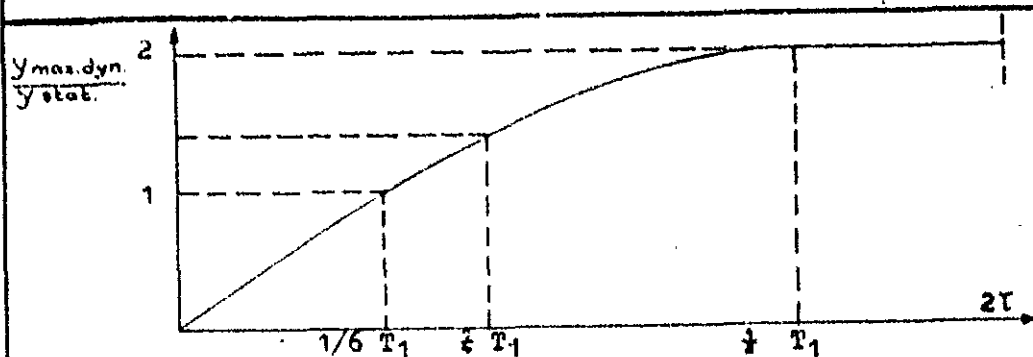


fig.9

De vergrotingsfactor $\frac{y_{max, dyn.}}{y_{stat.}}$ bij een plotseling aangrijpende en eindigende belasting als functie van de tijdsduur van deze belasting ($2T$) (geldt niet voor iedere belastingverdeling).