

veranderlijke coëfficiënten $F_0(t)$, $F_1(t)$ en $Q_0(t)$, $Q_1(t)$ voor ieder vak bepaald worden en daarna in 19 en 20 gesubstitueerd worden, d.w.z. men moet voor ieder tijdstip waarvoor men den stroom en de waterhoogte in een vak wil kennen de op dit tijdstip geldende waarden van de genoemde functies in 19 en 20 substitueeren. Er moeten voor ieder vak evenveel substituties uitgevoerd worden als het aantal tijdstippen bedraagt waarop men het getij wil berekenen. Aan de functies $F(t)$ en $Q(t)$ worden dus telkens bepaalde waarden gegeven. $F_0(t)$ en $Q_0(t)$ zijn integratieconstanten of randvoorwaarden en stellen de waterhoogte en den stroom voor in het punt $x = 0$ op een bepaald tijdstip.

Men kan dus schrijven $F(t) = z_0$ en $Q_0(t) = s_0$.

De coëfficiënten $F_1(t)$, $F_2(t)$ en $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ zijn dan functies van z_0 en s_0 en hunne afgeleiden naar den tijd.

Men lost het vraagstuk dus op door voor t bepaalde waarden aan te nemen, b.v. om het uur, waarvoor dan de coëfficiënten in 19 en 20 berekend kunnen worden en laat x variabel. Deze methode heeft derhalve een numeriek karakter. Zij werd het eerst aangewend door Lorentz en is daarna door Dronkers toegepast op de benedenrivieren. Lorentz ging hierbij uit van een bewegingsvergelijking van den vorm:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -b \cdot g \cdot H \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g |s| s}{H^2 \cdot b \cdot C^2} \quad 21.$$

terwijl door Dronkers de op blz. 20 afgeleide vergelijking 6 gebruikt wordt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{b \cdot g \cdot h} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{s^2}{C^2 \cdot b \cdot h^3} - \frac{(B+b)}{g \cdot b^2 \cdot h^2} s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad 6.$$

Verder luidt de continuïteitsvergelijking van Lorentz:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -b \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad 7.$$

en van Dronkers:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = + B \frac{\partial h}{\partial t} \quad 2'$$

De vakcoëfficiënten $F(t)$ en $Q(t)$ in 19 en 20 kunnen nu met behulp van de uitgangsvergelijkingen (bewegingsvergelijking en continuïteitsvergelijking) voor bepaalde waarden van t berekend worden. Dit kan op twee manieren gebeuren.

De eerste methode werd door Lorentz gevolgd (zie pag. 98 van Rapport Staatscommissie Lorentz) en door Dronkers gebruikt

in zijn meergenoemd artikel in de Ingenieur (No. 34 van 1935). Hier voerde Dronkers niet de grootheid z als onbekende in, doch de waterdiepte h (door hem h' genoemd). Hij stelde hier n.l. $z = h + \alpha x$, waarin α de gemiddelde helling van den rivierbodem voorstelt. Zeer in het kort verloopt deze methode als volgt:

Wanneer voor een bepaalde waarde van t de waarden van $F_0(t)$ en $Q_0(t)$ dus resp. h_0 of η_0 en \dot{s}_0 bekend zijn, benevens de benodigde afgeleiden naar den tijd van deze randvoorwaarden, dus \dot{h}_0 , \ddot{h}_0 , enz. (of $\dot{\eta}_0$, $\ddot{\eta}_0$, enz.) en \dot{s}_0 , \ddot{s}_0 , enz.⁺), dan kunnen door substitutie van 19 en 20 in de uitgangsvergelijkingen de waarden van $F_1(t)$, $F_2(t)$, berekend worden. Men kan dan n.l. alle termen met x , met x^2 enz. afzonderlijk nul stellen. Zijn dus de vakcoëfficiënten voor een bepaalde waarde van t gevonden dan zijn uit 19 en 20 de waterhoogte en de stroom voor iedere waarde van x te berekenen. Men vindt voor beiden een parabolisch verloop. Naarmate men in 19 en 20 meer termen in rekening brengt vallen deze hogere graadskrommen beter samen met de werkelijkheid, terwijl zij meer van de werkelijkheid afwijken naarmate x grooter is. Lorentz breekt de reeksen af na den vierden term, doch Dronkers moet in zijn gecompliceerde gevallen reeds de termen met x^3 verwaarloozen. De parabolen waardoor Lorentz het verloop van waterhoogte en stroom in een vak op een bepaald tijdstip benadert zijn dus van den derden graad, terwijl Dronkers met tweedegraads parabolen werkt. In het algemeen moet Dronkers daarom met kleinere vaklengten (kleinere x) rekenen dan Lorentz.

De tweede methode, toegepast door Dronkers (Verslag betreffende de stormvloedsberekeningen volgens de exacte methode, 1943, Archief directie Benedenrivieren v.d. Rijkswaterstaat), zal hier uitvoeriger behandeld worden, doch alleen voor het geval van een getijbeweging met opperwaterafvoer, waarbij van de vergelijkingen 6 en 2' uitgegaan wordt. De bepaling van de coëfficiënten van 19 en 20 geschiedt hierbij op een overzichtelijke wijze, terwijl van groot voordeel is dat de beteekenis van de op deze manier gevonden coëfficiënten duidelijk naar voren komt.

Begonnen wordt met aan te nemen, dat de grootheid h in vergelijking 6 niet veranderlijk is met x . Dit geldt bij benadering natuurlijk alleen voor een voldoende kleine vaklengte (welke nooit veel meer dan 5 km. bedraagt). De factoren

⁺) In het volgende zal voor de partieele afgeleiden naar t de bij getijberekeningen gebruikelijke schrijfwijze gevolgd worden n.l.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \dot{z}, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \ddot{s}, \quad \text{enz.}$$

$$\frac{1}{b \cdot g \cdot h}, \quad \frac{1}{c^2 \cdot b^2 \cdot h^3} \text{ en } \frac{B+b}{g \cdot b^2 \cdot h^2}$$

in de bewegingsvergelijking zijn dan alleen afhankelijk van t en dus voor een bepaalde waarde van t als constanten te beschouwen. Noemt men hen resp. P , Q en R , dan kan men voor vergelijking 6 schrijven:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P \cdot \dot{s} \pm Q \cdot s^2 + R \cdot s \cdot \dot{z} \quad 6'$$

(merk op dat $\dot{h} = \dot{z}$).

Verder luidt de continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = B \cdot \dot{z} \quad 2'$$

Fig. 45.

Gevraagd wordt nu om de coëfficiënten in 19 en 20 zoo te bepalen voor bepaalde tijdstippen, dat deze vergelijkingen het verloop van waterhoogte en stroom op deze tijdstippen met voldoende benadering weergeven. Zij in fig. 45 de kromme $P_a - P_b$ het werkelijke verloop van den waterspiegel in het vak $A - B$ op een bepaald tijdstip t en de kromme $Q_a - Q_b$ het werkelijke verloop van den stroom op dit tijdstip. Volgens de 2e methode worden nu $P_a - P_b$ en $Q_a - Q_b$ trapsgewijze benaderd. Een eerste benadering wordt verkregen, door de rechterleden van de vergelijkingen 6' en 2' onafhankelijk te stellen van x . Wat het rechter lid van 6' betreft, wordt dus verondersteld dat

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0 \text{ en } \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

en betreffende het rechterlid van: 2' : $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

We gaan dus uit van:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = C_1(t) \quad 6''$$

en

$$\frac{\partial s}{\partial x} = C_2(t) \quad 2''$$

waarin $C_1 = \text{constant voor } t = \text{constant} = P \cdot \dot{s}_0 \pm Q \cdot s_0^2 + R \cdot s_0 \cdot \dot{z}_0$
 en $C_2 = \text{constant voor } t = \text{constant} = B \cdot \dot{z}_0$. Het verloop van stroom en waterhoogte wordt dan bepaald door de raaklijnen aan resp. horizontaal en vertikaal getij in het punt A op het tijdstip t , welke gevonden worden door in 2'' en 6'' de randvoorwaarde s_0 en de differentiaalquotienten van z_0 en s_0 voor dit tijdstip te substitueeren. In fig. 45 zijn deze lijnen voorgesteld als $P_a - P'_b$ en $Q_a - Q'_b$. De eerste benadering van z en s in B ,

n.l. z_1 en s_1 verkrijgt men door vervolgens 2'' en 6'' te integreren naar x en men vindt dan

$$z_I = (P \cdot \dot{s}_0 \pm Q \cdot s_0^2 + R \cdot s_0 \cdot \dot{z}_0) x + z_0 = z_1 + z_0 \quad \alpha_1$$

$$s_I = B \cdot \dot{z}_0 \cdot x + s_0 = s_1 + s_0 \quad \beta_1$$

welke vergelijkingen een eerste benadering geven van de werkelijke waarden z en s op de plaats B.

Een tweede benadering wordt verkregen door te veronderstellen dat de rechterleden van 6' en 2' lineair afhankelijk zijn van x , zooals in α_1 en β_1 voorgesteld is, d.w.z. men stelt:

$$s = k_1 \cdot x + c_1 = s_1 + s_0 \quad \dot{s} = k_2 \cdot x + c_2 = \dot{s}_1 + \dot{s}_0, \quad \dot{z} = k_3 \cdot x + c_3 = \dot{z}_1 + \dot{z}_0,$$

waarin $k_1, k_2, k_3, c_1, c_2, c_3$, constant zijn voor een bepaald tijdstip t . Uit de eerste benadering, dus uit α_1 en β_1 , vindt men verder:

$$s = s_I = B \cdot \dot{z}_0 x + s_0, \quad \dot{s} = B \cdot \ddot{z}_0 x + \dot{s}_0, \quad z = z_I = (P \cdot \dot{s}_0 \pm Q \cdot s_0^2 + R \cdot s_0 \cdot \dot{z}_0) x + z_0$$

en

$$\dot{z} = (P \cdot \ddot{s}_0 \pm 2Q \cdot \dot{s}_0 \cdot s_0 + R \cdot \dot{s}_0 \cdot \dot{z}_0 + R \cdot s_0 \cdot \ddot{z}_0) x + \dot{z}_0 = g(s_0, z_0, x) + \dot{z}_0 \quad +)$$

substitueert men deze waarden in 6'* en 2'*; dan vindt men:

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial x} = P(B \cdot \ddot{z}_0 x + \dot{s}_0) \pm Q(s_0 + B \cdot \dot{z}_0 \cdot x)^2 + R \cdot s_0 \cdot \dot{z}_0 + R \cdot g(s_0, z_0, x) \cdot s_0 \quad 6'''$$

en

$$\frac{\partial s}{\partial x} = B \cdot g(s_0, z_0, x) + B \cdot \dot{z}_0 \quad 2'''$$

Men verkrijgt nu in tweede benadering de waarden z en s in B (fig. 46), door 6''' en 2''' naar x te integreren. Met verwaarloozing van de correcties van den term $R \cdot s_0 \cdot \dot{z}_0$ wordt dan gevonden:

+) Hierbij is verondersteld, dat de termen met

$$\frac{\partial P}{\partial t}, \frac{\partial R}{\partial t} \text{ en } \frac{\partial Q}{\partial t}$$

verwaarloosd kunnen worden. Achteraf blijkt echter vaak, dat het gewenscht is de termen met $\frac{\partial Q}{\partial t}$ wel in rekening te brengen (zie blz. 59 ~~onderaan~~).

$$z = \underbrace{P \cdot \dot{s}_0 \cdot x + Q \cdot s_0^2 \cdot x}_{z_1} + \underbrace{R \cdot \dot{z}_0 \cdot s_0 \cdot x + Q \cdot B \cdot s_0 \cdot \dot{z}_0 \cdot x^2 + \frac{1}{3} Q \cdot B^2 \cdot \dot{z}_0^2 \cdot x^3 + \frac{1}{2} P B \ddot{z}_0 \cdot x^2}_{z_2}$$

$$+ z_0 = z_0 + z_1 + z_2 \quad \alpha_2$$

en

$$s = \underbrace{B \cdot \dot{z}_0 \cdot x}_{s_1} + \underbrace{\frac{1}{2} P \cdot B \cdot \ddot{s}_0 \cdot x^2 + B \cdot Q \cdot s_0 \cdot \dot{s}_0 \cdot x^2}_{s_2} + s_0 = s_0 + s_1 + s_2 \quad \beta_2$$

Met andere woorden gaat men dus bij de 2e benadering als volgt te werk:

Van een bepaald punt P in het te beschouwen vak A-B (fig. 46) bepaalt men de waarden s , s^2 , \dot{s} en \dot{z} , welke in de vergelijkingen 6' en 2' voor het verloop van waterhoogte en stroom in dat vak voorkomen, uit de waarden voor z en s welke men op dat punt P volgens de eerste benadering vindt, en welke in fig. 46 aangegeven zijn als z_p en s_p , dus door eerst weer aan te nemen, dat

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial s}{\partial x}$$

bij constante t over de geheele vaklengte onveranderlijk zijn. Substitueert men deze waarden voor s , s^2 , \dot{s} en \dot{z} in 6' en 2', dan vindt men een nieuwe, thans met x variabele benadering voor de werkelijke waarden van

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial s}{\partial x}$$

in dat punt. Wanneer men dit doet voor een aantal punten in het vak, dan kan men krommen voor z en s construeeren (mathematisch beteekent dit de integratie van de vergelijkingen 6''' en 2''' naar x). Deze zijn voorgesteld in fig. 47 als de krommen $P_A - P_B$, en $Q_A - Q_B$. Deze krommen geven een betere benadering van het werkelijke verloop $P_A - P_B$ en $Q_A - Q_B$, dan de bij de eerste benadering aangegeven rechten $P_A - P_B$ en $Q_A - Q_B$.

Wordt door deze tweede benadering het werkelijke verloop nog niet voldoende nauwkeurig weergegeven, dan moet men een derde benadering toepassen. De raaklijnen aan de getijkromme in een punt x worden dan bepaald door in 6''' en 2''' de waarden z_{II} en s_{II} te substitueeren, welke bij de 2e benadering gevonden werden. Meestal zal de 2e benadering echter voldoende nauwkeurig zijn. Het spreekt vanzelf dat dit in de eerste plaats afhangt van de gekozen vaklengte. Over het algemeen is voor een vaklengte, welke gelijk of kleiner is dan 5 km. de derde benadering

46
Fig. 47.

overbodig en mag dan dus met de vergelijkingen α_2 en β_2 gewerkt worden. Dit is echter weer afhankelijk van de gewenschte nauwkeurigheid der berekeningen. Soms kunnen wel vakken van \pm 10 km. lengte genomen worden.

Zooals in de voetnoot op blz. 57 opgemerkt is, zijn de afgeleiden naar t van P, Q en R, dus \dot{P} , \dot{Q} en \dot{R} , nul gesteld bij de bepaling van \dot{z} uit α_1 , zoodat in de vergelijkingen 6''' en 2''' deze differentiaalquotienten verwaarloosd zijn. Dronkers acht het echter wenschelijk om in 2''' de coëfficiënt \dot{Q} niet te verwaarloozen. Nu is

$$\dot{Q} = \frac{-3}{c^2 \cdot b^2 \cdot h_0^4}$$

zoodat in dat geval aan β_2 nog de term

$$\dot{Q} \cdot s_0 \cdot s_0 \cdot B = - \frac{3 \cdot B \cdot s_0 \cdot s_0}{c^2 \cdot b^2 \cdot h_0^4}$$

toegevoegd zou moeten worden. (α_2 wordt niet gewijzigd daar de correcties van de term $R \cdot s_0 \cdot z_0$ verwaarloosd blijven). Doet men dit, en vervangt men P, Q en R door de coëfficiënten welke zij voorstellen, dan vindt men voor de tweede benadering van de waterhoogte z en den stroom s in B op een afstand x van A de formules:

$$z = z_0 + \frac{s_0 s_0 x}{c^2 \cdot b^2 \cdot h_0^3} + \frac{s_0 \cdot \dot{z}_0 \cdot B \cdot x^2}{c^2 \cdot b^2 \cdot h_0^3} + \frac{\dot{s}_0 \cdot x}{b \cdot g \cdot h_0} - \frac{(b+B) s_0 \cdot \dot{z}_0 \cdot x}{b^2 \cdot g \cdot h_0^2} \pm$$

a b c d

$$\pm \frac{B^2 \cdot \dot{z}_0^2 \cdot x^3}{3c^2 \cdot b^2 \cdot h_0^3} + \frac{B \cdot \ddot{z}_0 \cdot x^2}{2 \cdot g \cdot b \cdot h_0}$$

e f

22.

en

$$s = s_0 + B \cdot \dot{z}_0 \cdot x + \frac{\ddot{s}_0 \cdot B \cdot x^2}{2 \cdot g \cdot b \cdot h_0} + \frac{\dot{s}_0 s_0 B \cdot x^2}{c^2 \cdot b^2 \cdot h_0^3} - \frac{3 s_0 s_0 \dot{z}_0 B \cdot x^2}{2 c^2 \cdot b^2 \cdot h_0^4}$$

a' b' c' d'

23.

De termen welke in de rechterleden van deze vergelijkingen voorkomen hebben de volgende beteekenis:

1. termen met x.

term a. Eerste benadering van den weerstandsterm. De weerstand in het beschouwde vak is hierbij over de geheele vaklengte voor een bepaald tijdstip constant gedacht en

- gelijk aan den weerstand aan het begin van het vak.
- term c. Eerste benadering van de versnellingsterm. De versnelling wordt hierbij over de geheele vaklengte gelijk gedacht aan de versnelling aan het begin van het vak.
- term d. Eerste benadering van den samengevatten Bernouilliterm en correctie van den versnellingsterm. Ook deze term wordt voor het geheele vak gelijkgesteld aan de waarde welke zij aan het begin van het vak heeft.
- term a' Eerste benadering van de komberging van het vak per seconde. Ook deze term is constant gedacht over het geheele vak.

2. termen met x^2 en x^3 .

- term b. Correctie van den weerstandsterm, doordat men den stroom in het vak lineair met x , volgens de eerste benadering, laat veranderen.
- term e. Tweede correctie van den weerstandsterm, als onder b.
- term f. Correctie op den versnellingsterm, eveneens doordat men den stroom volgens de eerste benadering laat veranderen met x .
- term b'. Correctie van de komberging op het vak tengevolge van de verandering van de waterhoogte met x volgens de eerste benadering.
- term c'. Evenals b'.

Volgens de tweede methode (Dronkers) komt men niet tot dezelfde formules voor z en s als volgens de eerste (Lorentz-Dronkers). Bij de eerste methode worden de reeksen 19 en 20 afgebroken na een bepaalde macht. In de oplossing verschijnen dan de coëfficiënten van de niet verwaarloosde machten volledig. Bij de tweede methode worden de verwaarloozingen niet op deze mathematische en onoverzichtelijke wijze toegepast. Doordat men hierbij de vergelijkingen 22 en 23 op meer aanschouwelijke manier afleidt, kunnen de aangebrachte wijzigingen beter gemotiveerd worden. Men ziet, dat hier behalve termen met x en x^2 ook nog (in vergelijking 22) een term met x^3 opgenomen is, zulks in tegenstelling met de 1e methode, waar de termen met deze macht geheel verwaarloosd zijn.

Resumeerende kan gezegd worden dat de afleiding volgens de tweede methode de voorkeur verdient boven de eerste, vooral wanneer het wenschelijk blijkt om nog enkele termen ten behoeve van een eenvoudiger rekenwijze te verwaarloozen, daar de waarde van de termen in de vergelijkingen 22 en 23 gemakkelijk te beoordeelen is.

In het voorafgaande werd bij de behandeling van de tweede methode verondersteld dat de coëfficiënten P , Q en R van x onafhankelijk zouden zijn, d.w.z. dat de waterdiepte over een vak constant is. Het is echter vaak van belang, om de veranderingen

van de diepte met x , wel in rekening te brengen, ook wel bij korte vakken. In verband hiermede moeten dan correcties aangebracht worden bij de berekening. Op deze questie zal hier niet nader worden ingegaan, doch volstaan worden met te verwijzen naar het "Verslag betreffende de stormvloedsberekeningen volgens de exacte methode, 1943", van Dr. Dronkers, (Archief directie Benedenrivieren v.d. Rijkswaterstaat), waar een en ander behandeld is.

7. Toepassing van de verschillende berekeningsmethoden.

a. Algemeene opmerkingen. ^{voor de fig.} Bijlage 8 en 9

Afhankelijk van de beschikbare gegevens, het gestelde doel en de vereischte nauwkeurigheid kent men in de praktijk verschillende gevallen waarbij een min of meer uitgebreide getijberekening toegepast moet worden. In de eerste plaats kunnen hierbij de twee volgende groepen onderscheiden worden:

1. Getijberekeningen naar een bekende (gemeten) toestand.
2. Getijberekeningen voor een onbekend geval.

Onder de eerste groep vallen dan de volgende getijproblemen:

- a. De berekening van de constante van Eytelwein, wanneer voor een bepaald vak de getijbeweging gemeten is en de profielsgrootheden bekend zijn.
- b. Berekeningen ter contrôle van de schematisatie van een geulenstelsel, door, uitgaande van een bepaalde schematisatie, een bekende getijbeweging na te rekenen.
- c. Berekening van getijstroomen wanneer het verticale getij en de profielsgrootheden bekend zijn.

De onder a en b genoemde berekeningen hebben meestal slechts een inleidend karakter, daar zij dienen tot vaststelling van de basis waarvan de eigenlijke berekeningen uit zullen gaan.

Onder 2 moeten de volgende problemen gerekend worden:

- a. Berekening van de verandering van een bekende getijbeweging tengevolge van een verandering van de profielsgrootheden, b.v. door uitbaggering.
- b. Berekening van de verandering van een bekende getijbeweging tengevolge van een verandering in de randvoorwaarden, b.v. door afsluiting van een rivierarm, verandering van den oppervlakterafvoer, enz.
- c. Stormvloedsberekeningen.

Afhankelijk van de vereischte nauwkeurigheid zal men de sinusoidale of de exacte methode toepassen bij de berekening. Ook komt het vaak voor, dat de sinusoidale methode gebruikt wordt als inleidende berekening waarmede dan een eerste benadering wordt verkregen. Daarna wordt dan met de exacte methode,

steunende op dit voorloopige resultaat de eigenlijke berekening uitgevoerd.

Voor ongeoeffenden moet de sinusoidale methode, indien ze tenminste toegepast ~~kan~~^{mag} worden, aanbevolen worden boven de exacte. Zonder zeer veel tijdverlies zal n.l. bij gebrek aan routine met de exacte methode geen noemenswaard grotere nauwkeurigheid bereikt kunnen worden, dan verkregen wordt bij een sinusoidale benadering. Vooral geldt dit voor de berekening van de getijvoortplanting in een geulenstelsel met veel splitsingspunten.

Beschikt men echter over ruime ervaring en over geoefende rekenaars, dan voert de exacte methode, ook wanneer men met een sterk vertakt stelsel te maken heeft, na niet te langdurige berekeningen tot een nauwkeuriger resultaat dan met de sinusoidale methode bereikt kan worden. Vooral voor stormvloeds- en stroomberekeningen is de exacte methode dan te verkiezen.

In het volgende zal nu de praktische toepassing van beide methoden in principe behandeld worden.

b. Methoden van Lorentz en Mazure.

We zagen in hoofdstuk 5, dat bij deze methoden de getijbeweging benaderd wordt door een sinusoidale golfbeweging, waarbij uitgegaan wordt van een lineaire bewegingsvergelijking. Algemeen kan deze getijbeweging in een kanaal voorgesteld worden door de volgende formules:

$$\eta = a_1 \cdot e^{-\zeta, x} \cdot \cos n(t - \frac{x}{w_1} + p_1) + a_1' \cdot e^{+\zeta', x} \cdot \cos n(t + \frac{x}{w_1'} + p_2) \quad 17.$$

en

$$s = c_1 \cdot e^{-\zeta, x} \cdot \cos n(t - \frac{x}{w_1} + p_1') + c_1' \cdot e^{+\zeta', x} \cdot \cos n(t + \frac{x}{w_1'} + p_2') \quad 18.$$

Voor elk punt van het kanaal is hierdoor de verticale en horizontale waterbeweging vastgelegd, indien de volgende grootheden bekend zijn:

$$a_1, a_1', c_1, c_1', p_1, p_1', p_2, p_2', \zeta, \zeta', w_1 \text{ en } w_1'.$$

Deze onbekenden kunnen opgelost worden met behulp van twee randvoorwaarden, waardoor het verticale getij of de stroom in twee punten van het kanaal gegeven zijn, en verder de uitgangsvergelijkingen (bewegingsvergelijking en continuïteitsvergelijking).

De oplossing van deze 12 onbekenden is niet eenvoudig indien het getij in den vorm van 17 en 18 gegeven is. Het probleem kan echter zeer vereenvoudigd worden wanneer men complexe groot-

heden invoert.

Een complexe grootheid wordt voorgesteld door een vector in het platte vlak met een reële en imaginaire projectie, respectievelijk op een reële en imaginaire as. (fig. 47). De reële projectie stelt dan resp. het verticale of horizontale getij voor. De veranderingen van het getij worden bepaald door draaiing en verlenging of verkorting van den vector. Voor de algebraïsche behandeling wordt herinnerd aan de volgende betrekkingen: (zie fig. 48).

1. $e^{iF} = \cos F + i \sin F$.
2. $e^{-iF} = \cos F - i \sin F$.
3. $e^{Q+iF} = e^Q (\cos F + i \sin F)$.
4. $e^{Q-iF} = e^Q (\cos F - i \sin F)$.

We kunnen ons nu 17 en 18 voorstellen als de reële projecties van de volgende vectoren:

$$\eta^+ = a_1 e^{-\sigma_1 x} e^{i n t} - \frac{i n x}{w_1} + i n p_1 + a_1' e^{+\sigma_1' x} e^{i n t} + \frac{i n x}{w_1} + i n p_2 \quad 24.$$

$$s^+ = c_1 e^{-\sigma_1 x} e^{i n t} - \frac{i n x}{w_1} + i n p_1' + c_1' e^{+\sigma_1' x} e^{i n t} + \frac{i n x}{w_1} + i n p_2' \quad 25.$$

Stellen we nu $-\sigma_1 - \frac{i n}{w_1} = r_1$ en $\sigma_1' + \frac{i n}{w_1} = r_2$

en voorts:

$$a_1 e^{i n p_1} = A, \quad a_1' e^{i n p_2} = A', \quad c_1 e^{i n p_1'} = C \quad \text{en} \quad c_1' e^{i n p_2'} = C',$$

dan krijgen we inplaats van 24 en 25 de formules:

$$\eta^+ = A e^{i n t} + r_1 x + A' e^{i n t} + r_2 x \quad 26.$$

en

$$s^+ = C e^{i n t} + r_1 x + C' e^{i n t} + r_2 x \quad 27.$$

De meetkundige beteekenis van deze grootheden moge blijken uit Fig. 49. fig. 49, waarin de vector η^+ grafisch voorgesteld is. Door substitutie van 26 en 27 in de continuïteitsvergelijking 2 vindt men dan verder:

$$C = -\frac{iBn}{r_1} \cdot A \text{ en } C' = -\frac{iBn}{r_2} \cdot A', \text{ zoodat}$$

$$s^+ = -\frac{iBn}{r_1} \cdot A \cdot e^{int + r_1 x} - \frac{iBn}{r_2} \cdot A' \cdot e^{int + r_2 x} \quad 28.$$

Voor een geval zonder opperwaterafvoer, wanneer dus $r_1 = -r_2$, vindt men uit 2 en 5

$$r = \pm \sqrt{\frac{-n^2 + ink}{g \cdot H}}$$

Is er wel opperwaterafvoer, dan worden r_1 en r_2 bepaald uit de vergelijking 74 op blz. 115 of vergelijking 84 op blz. 158 van het proefschrift van Mazure. Hij noemt deze vergelijking de karakteristieke vakvergelijking. In den factor r zijn voortplanting en demping tot één onbekende vereenigd, welke door Mazure voortplantingscoëfficiënt genoemd wordt. In het reële deel van A zijn verder de fase en de amplitude van het getij in het punt $x = 0$ samengevat. Het aantal onbekenden is hiermede dus gereduceerd tot vier, n.l.

$$A, A', r_1 \text{ en } r_2.$$

De grootheden A en A' kunnen bepaald worden uit 26 en 28 voor $x = 0$, dus uit de gegevens voor η_0^+ en s_0^+ (randvoorwaarden). Men vindt dan:

$$A = \frac{r_1}{r_1 - r_2} \cdot \eta_0^+ + \frac{s_0^+}{iBn} \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 - r_2}$$

en

$$A' = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \cdot \eta_0^+ + \frac{s_0^+}{iBn} \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}.$$

Voor een getijbeweging zonder opperwaterafvoer, dus voor $r_1 = -r_2$ is dan:

$$A = \frac{r}{2 iBn} \cdot s_0^+ + \frac{1}{2} \eta_0^+ \text{ en } A' = -\frac{r}{2 iBn} \cdot s_0^+ + \frac{1}{2} \eta_0^+$$

Substitueert men nu de uitdrukkingen voor A en A' in 26 en 28, dan vinden we voor de getijbeweging op de plaats x het reële deel van de formules:

$$\eta_x^+ = \eta_0^+ \cdot \left(\frac{r_1 \cdot e^{r_1 x}}{r_1 - r_2} + \frac{r_2 \cdot e^{r_2 x}}{r_2 - r_1} \right) + s_0^+ \frac{r_1 \cdot r_2}{Bni} \left(\frac{e^{r_1 x}}{r_1 - r_2} + \frac{e^{r_2 x}}{r_2 - r_1} \right) \quad 29.$$

$$s_x^+ = -\eta_0^+ \cdot Bni \left(\frac{e^{r_1 x}}{r_1 - r_2} + \frac{e^{r_2 x}}{r_2 - r_1} \right) + s_0^+ \left(\frac{r_1 \cdot e^{r_2 x}}{r_1 - r_2} + \frac{r_2 \cdot e^{r_1 x}}{r_2 - r_1} \right) \quad 30.$$

Voor een getijbeweging zonder opperwaterafvoer wordt dit ($r_1 = -r_2$):

$$\eta_x^+ = \frac{\eta_0^+ \frac{1}{2}(e^{rx} + e^{-rx})}{H_h} + \frac{s_0^+ \frac{r}{B \sin} \frac{1}{2}(-e^{rx} + e^{-rx})}{H_s} \quad 31.$$

$$s_x^+ = \frac{-\eta_0^+ \frac{1}{2} \frac{iBn}{r}(e^{rx} - e^{-rx})}{S_h} + \frac{s_0^+ \frac{1}{2}(e^{rx} + e^{-rx})}{S_s} \quad 32.$$

Waterhoogte en stroom in een bepaald punt x van een gegeven kanaal zijn hier dus uitgedrukt in waterhoogte en stroom in het begin van dat kanaal en de factoren H_h , H_s , S_h en S_s , welke afhangen van de profielsgrootheden, den weerstandsfactor k (bij opperwaterafvoer de factoren m_0 , m_1 en m_2) en van de frequentie van het getij. Daar de weerstandsfactor k (resp. de factoren m) berekend moet worden uit de amplitude van den getijstroom (zie blz 48 e.v.) kunnen H_h , H_s , S_h en S_s , kortweg geulconstanten genoemd, alleen bepaald worden wanneer men den maximum stroom ongeveer halverwege het kanaal kent. Hiervoor zal dan veelal een schatting gedaan moeten worden. Uit de berekening zal verder moeten blijken of deze geschatte stroom voldoende overeenkomt met de door berekening gevonden waarde. Is dat niet het geval, dan zal een nieuwe schatting gedaan en de berekening opnieuw uitgevoerd moeten worden.

In de praktijk zal het meestal voorkomen dat het geschematiseerde geulstelsel waarvoor men een getijberekening wil uitvoeren uit meer dan één vak bestaat.

Fig. 50. Zij b.v. een geul A - C geschematiseerd door twee kanaalvakken A-B en B-C (fig. 50). Uitgaande van het getij in A als randvoorwaarde, voorgesteld door het reële deel van 29 en 30 resp. 31 en 32, kunnen we het getij in B hierin uitdrukken, wanneer we de geulconstanten van A-B kennen. Zijn deze resp.

$$H'_h, H'_s, S'_h, S'_s,$$

dan vinden we het getij in B als het reële deel van de formules:

$$\eta_b^+ = \eta_a^+ \cdot H'_h + s_a^+ \cdot H'_s \quad 33.$$

en

$$s_b^+ = \eta_a^+ \cdot S'_h + s_a^+ \cdot S'_s \quad 34.$$

Verder gaande kunnen we nu het getij in C uitdrukken in η_b^+ en s_b^+ , wanneer we de geulconstanten van B - C kennen. Stel deze H''_h , H''_s , S''_h en S''_s , dan vinden we:

$$\eta_c^+ = \eta_b^+ \cdot H_h'' + s_b^+ \cdot H_s'' \quad 35.$$

$$s_c^+ = \eta_b^+ \cdot S_h'' + s_b^+ \cdot S_s'' \quad 36.$$

Wil men nu niet bepaaldelijk de getijbeweging in B kennen, doch interesseert men zich alleen voor het getij in C, dan hoeft men het getij in B niet te berekenen en evenmin η_b^+ en s_b^+ , doch kan men direct het getij in C uitdrukken in het getij in A. Door substitutie van 33 en 34 in 35 en 36 vindt men n.l.

$$\eta_c^+ = \frac{(H_h'' \cdot H_h' + H_s'' \cdot S_h')}{\dots} \eta_a^+ + \frac{(H_h'' \cdot H_s' + H_s'' \cdot S_s')}{\dots} s_a^+ \quad 37.$$

$$s_c^+ = \frac{(S_h'' \cdot H_h' + S_s'' \cdot S_h')}{\dots} \eta_a^+ + \frac{(S_h'' \cdot H_s' + S_s'' \cdot S_s')}{\dots} s_a^+ \quad 38.$$

De onderstreepte factoren in 37 en 38 zijn te beschouwen als geulconstanten van de geul A - C en kunnen bepaald worden, zonder dat het getij in B afzonderlijk berekend behoeft te worden. Heeft men voor het punt waarin men het getij wil kennen de grootheden in den complexen vorm berekend, dan vindt men het gezochte getij als het reële gedeelte hiervan.

Het kan ook voorkomen dat de geul voor de berekening in een aantal naast elkander liggende geulen verdeeld moet worden met verschillende profielen (fig. 51).

Fig. 51.

Men neemt dan aan dat het vertikale getij in alle parallelgeulen voor dezelfde waarde van x gelijk is, zoodat men maar met één continuïteitsvergelijking te maken heeft. Voor iedere geul heeft men echter een aparte bewegingsvergelijking, daar de profielen onderling verschillen. Voor de oplossing van dit vraagstuk wordt verder verwezen naar het rapport van de Staatscommissie Lorentz (§141 Blz. 226).

In het bovenstaande gingen we uit van het geval dat als randvoorwaarden gegeven zijn de stroom en het vertikale getij in den mond van het kanaal. Nu zal het echter in de praktijk vaak voorkomen dat de stroom in den mond niet bekend is, daarentegen b.v. wel het getij op nog een andere plaats b.v. η_c in fig. 50. In deze figuur is dan s_a wel onbekend, maar behalve η_a is dan ook η_c gegeven. s_a kan dan berekend worden uit vergelijking 37 waarna s_c uit 38 bepaald kan worden.

Ook komt zeer vaak het probleem voor dat in fig. 52 voorgesteld is. De geul B-C is oneindig lang, met constant profiel, zoodat hierin geen interferentie optreedt. Het getij bij B in kanaal B-C bestaat dan uit een enkele golf:

$$\eta_b^+ = a \cdot e^{int - rx_b} \quad \text{en} \quad s_b^+ = \frac{iBn}{r} \cdot \eta_b^+$$

Men kan nu alles berekenen wanneer alleen het verticale getij in A of op een andere plaats gegeven is. s_a^+ en h_b^+ kunnen dan n.l. berekend worden uit 33 en 34.

Fig. 53. Verder kan zich in de praktijk het geval voordoen, dat men de getijbeweging moet bepalen in een geulenstelsel dat een z.g. gesloten kring vormt, zooals in fig. 53 schetsmatig is voorgesteld. De getijbeweging in de geulen A-B-C en A-D-C is dan te berekenen uit één randvoorwaarde, b.v. het verticale gtij in A. We beschouwen n.l. de geul A- B- C - D - A als een doorlopende geul. Niet alleen in het beginpunt van deze "gestrekte" geul is dan het verticale getij gegeven, doch ook in het eindpunt, zoodat we hier over twee randvoorwaarden beschikken.

Tenslotte kunnen als randvoorwaarden ook gegeven zijn het horizontale getij op één plaats en het verticale getij op een ander punt. Dit geval zal zich voordoen wanneer we met een doodlopende geul te maken hebben (zie blz. 28, 1), doch overigens zelden voorkomen, daar men meestal over meer en betere gegevens beschikt wat het verticale getij betreft dan wat den stroom aangaat. Een getijprobleem waarbij als randvoorwaarden alleen de stroom op twee plaatsen gegeven is, komt om deze reden praktisch heelemaal nooit voor.

c. Exacte methode van Dronkers. +)

In het volgende zal de praktische toepassing van de exacte methode alleen behandeld worden voor de gevallen waarbij uitgegaan wordt van de vergelijkingen 2' en 6 (blz. ~~16~~ en 20). De bewegingsvergelijking 6 zal in de praktijk verkozen worden boven 21 (blz. 54), welke door Lorentz gebruikt werd bij zijn proeve van een "exacte" berekening (§ 98 rapport Staatscommissie Lorentz). Zoekt men n.l. een zoo nauwkeurig mogelijke benadering van de getijbeweging, dan wordt in de bewegingsvergelijking 21 nog teveel verwaarloosd, terwijl men voor een meer globale berekening genoeg zal kunnen nemen met een benadering in den vorm van een sinusoïde. Ofschoon de naam "exacte methode" misschien anders zou kunnen doen vermoeden, komt het ook bij deze methode in de praktijk neer op een benadering. Wordt het werkelijk voorkomende getij n.l. voorgesteld door machtreeksen met een oneindig aantal termen (19 en 20 blz. 53) dan zoekt men dit te benaderen door een oplossing in den vorm van 22 en 23 (blz. 59). De naam "exacte methode" duidt er echter op, dat bij deze methode de mogelijkheid bestaat, het getij zooveel als men wil te benaderen.

+) Dr. J.J. Dronkers. Verslag betreffende de stormvloedsberekeningen volgens de exacte methode, 1943. Archief directie Benedenrivieren v.d. Rijkswaterstaat.

Evenals bij de sinusoidale methode moet men hier het betreffende geulenstelsel schematiseeren, d.w.z. onderverdeelen in vakken met constant profiel, waarbij deze profielen zoodoornoodig van uur tot uur gewijzigd kunnen worden in verband met den veranderenden waterstand. Volgens 22 en 23 kunnen dan de waterhoogte en de stroom aan het eene einde van een vak op bepaalde tijdstippen uitgedrukt worden in waterhoogte en stroom op de andere vakgrens. Trapsgewijze kan zoo het verband gevonden worden tusschen waterhoogte en stroom aan beide uiteinden van een geul of geulenstelsel.

In de eerste plaats moet er nu op gelet worden dat bij de schematisatie de vaklengten niet te groot gekozen worden, waarbij twee overwegingen gelden:

1. Het door schematisatie verkregen stelsel vakken moet de werkelijkheid zooveel mogelijk benaderen (zie hoofdstuk 3 blz. 23). Op plaatsen waar het geulprofiel zeer veranderlijk is zal de vaklengte uit dit oogpunt bekeken kleiner moeten zijn dan in gedeelten van meer constanten vorm. Bij toepassing van de sinusoidale methode zal bij de bepaling der vaklengten alleen hierop gelet moeten worden. Past men echter de exacte methode toe, dan moet nog het volgende in acht worden genomen:
2. Stel, dat in een vak A - B de getijbeweging in A volledig bekend is. Bepaalt men nu volgens 22 en 23 waterhoogte en stroom in B, dan zullen de gevonden waarden z'_b en s'_b een benadering zijn van de werkelijke waarden z_b en s_b . Dit verschil zal belangrijker zijn naarmate de afstand A - B, dus de vaklengte, grooter is. Wil men volstaan met een tweede benadering van het getij, dus volgens 22 en 23, dan zal men de vaklengte hieraan moeten aanpassen.

We noemen nu de termen a, c en d van 22 en den term a' van 23, welke door een eerste benadering gevonden worden, termen van de eerste orde en verder de termen b, e, f, b' en c', welke er door de tweede benadering bijkomen, termen van de tweede orde. Vervolgens noemen we de termen die bij een derde benadering nieuw zouden ontstaan, termen van de derde orde. De exponent van x neemt toe met de hoogere orde. Hoe kleiner men daarom de vaklengte kiest, hoe meer de termen van de lagere orden gaan overheerschen ten opzichte van de termen van hoogere orde.

Het gebruik van 22 en 23, dus de tweede benadering van het door de reeksen 19 en 20 voorgestelde getij is geoorloofd, wanneer deze reeksen in voldoende mate convergeeren, d.w.z. wanneer de termen van de derde orde, welke hierbij verwaarloosd

worden, klein genoeg zijn ten opzichte van de termen van de eerste en tweede orde. Het blijkt, dat dit het geval is, wanneer de grootste der termen van de eerste orde belangrijk groter is dan de grootste der termen van de tweede orde. ⁺⁾

Dit hoeft nu niet op ieder tijdstip van de beschouwde getijperiode het geval te zijn, wanneer men maar zorgt, dat hieraan wel voor het grootste deel van de beschouwde tijdstippen voldaan is. Wat de keuze der vaklengte betreft kan men drie gevallen onderscheiden:

a. Oneindig lange rivier.

Men mag hier globaal aannemen dat de vaklengte hier niet veel groter dan 5 km. mag zijn. Bij een zoodanige vaklengte zullen de termen f in 22 en b' in 23 verwaarloosd mogen worden, daar deze termen in dit geval over het algemeen veel kleiner zijn dan de termen b , e en c' . Dit geeft een groot gemak, daar het nogal bewerkelijk is om de in deze termen voorkomende grootheden \ddot{s} en \ddot{z} te berekenen. Bij getijberekeningen op onze benedenrivieren komt dit geval veelvuldig voor, daar de bovenrivieren praktisch als oneindig lang beschouwd mogen worden.

b. Doodlopende geul.

Nabij het afgesloten einde worden s en \dot{s} steeds kleiner, hetgeen niet het geval is met z en \dot{z} . In 22 overwegen dan de termen van de tweede orde e en f , daar dit de eenige termen zijn waarin s noch \dot{s} voorkomt. Dicht bij het afgesloten einde moet daarom de vaklengte zeer klein genomen worden.

c. Zich plotseling zeer sterk verwijdende geul.

Fig. 54. Van A naar B (fig. 54) neemt de amplitude van het vertikale getij sterk af (zie fig. 36a en blz. 42). De stroom neemt daarentegen toe. (Zie hoofdstuk 5a). In vergelijking 23 zullen dan de termen b' en c' toenemen ten opzichte van a' . Ook in dit geval zal dus nabij punt B in kanaal A-B in fig. 54 de vaklengte klein moeten zijn.

Deze situatie komt bij ons niet voor. Bij de noordelijke zeegaten wordt men hieraan wel eenigszins herinnerd, maar toch is hier het vertikale getij nergens klein te noemen ten opzichte van den stroom.

Is het bij de berekening betrokken geulenstelsel met inachtneming van het bovenstaande geschematiseerd en zijn voldoende randvoorwaarden gegeven, dan kan, uitgaande van de vergelijkingen 2' en 6, de oplossing van het getijprobleem gevonden worden

⁺⁾ Het kan voorkomen dat in zoo'n geval één of meerdere termen van de tweede orde groter zijn dan de kleinste term van de eerste orde. Maatgevend is echter alleen de verhouding der max. waarden van de grootste termen van iedere orde.

in den vorm van 22 en 23. Hoe men hierbij praktisch in verschillende gevallen te werk dient te gaan, zal in het volgende behandeld worden.

Bij de bespreking van de praktische toepassing van de sinusoidale methode onder b van dit hoofdstuk werden verschillende randproblemen onderscheiden (zie ook hoofdstuk 4 blz. 26). Principieel werd hierbij, wat de oplossingsmethode betreft, geen verschil gemaakt. Bij de toepassing van de exacte methode is echter het onderscheid in den gang van de berekening voor verschillende randproblemen grooter. In het onderstaande zal de oplossing van deze problemen in het kort worden aangegeven voor een eenvoudig schema, n.l. een oneindig lange rivier zonder vertakkingen.

1. Gegeven zijn het vertikale en het horizontale getij in den mond van de rivier, dus z_0 en s_0 (fig. 55).

Fig. 55.

Dit is het eenvoudigste randprobleem en is zonder groote moeilijkheden tot oplossing te brengen. Voor ieder tijdstip kan men, gebruik makende van de vergelijkingen 22 en 23, waarin de termen f en b' verwaarloosd mogen worden, waterhoogte en stroom aan het einde van het eerste vak, dus z_1 en s_1 , uitdrukken in z_0 en s_0 .

Uitgaande van z_1 en s_1 kunnen dan op dezelfde wijze uit 22 en 23 z_2 en s_2 berekend worden, d.w.z. waterhoogte en stroom aan het einde van het tweede vak (fig. 55).

Men gaat zoo voort, totdat men aan het einde van het beschouwde gebied gekomen is. Om z_1 en s_1 in z_0 en s_0 te kunnen uitdrukken, moeten echter ook de eerste afgeleiden naar t van deze randvoorwaarden, dus \dot{z}_0 en \dot{s}_0 bekend zijn (zie de termen b , c , d en e in 22 en de termen a' , c' , en d' in 23). Voor de berekening van z_2 en s_2 moeten verder ook \ddot{z}_0 en \ddot{s}_0 gegeven zijn.

Deze hoeven echter praktisch niet berekend te worden, indien z_1 en s_1 bekend zijn. Tenslotte komt het er in dit geval op neer, dat de waarden z_n en s_n aan het einde van het n_e vak alleen eenduidig berekend kunnen worden, als van z_0 en s_0 alle afgeleiden naar t tot en met de n^e bekend zijn. Bij deze berekening zullen dus achtereenvolgens z_1 , s_1 , z_2 , s_2 enz. tot en met z_n , s_n berekend moeten worden. Zijn de randvoorwaarden echter in zoodanigen vorm gegeven, dat alle benodigde afgeleiden voldoende nauwkeurig te bepalen zijn, dan biedt dit probleem geen verdere moeilijkheden en is in korten tijd tot oplossing te brengen. Indien de randvoorwaarden alleen voor een eindig interval bekend zijn, zullen z_n en s_n slechts bij benadering berekend kunnen worden.

Anders wordt dit, wanneer inplaats van z_0 en s_0 een

andere combinatie van getijgrootheden als randvoorwaarden gegeven is, dus wanneer we met een ander randprobleem te maken hebben. In de vergelijkingen 22 en 23 kunnen de volgende getijgrootheden als onbekenden voorkomen:

$$z_0, \dot{z}_0, \ddot{z}_0, s_0, \dot{s}_0, \ddot{s}_0, z \text{ en } s,$$

Ingeval men nu met het eerste en eenvoudigste randprobleem te maken heeft, zijn naast z_0 en s_0 vanzelf ook hun afgeleiden, dus \dot{z}_0 , \ddot{z}_0 , \dot{s}_0 en \ddot{s}_0 bekend. Is echter hetzij z_0 , hetzij s_0 onbekend, dan ontbreken automatisch ook de afgeleiden van deze functie, zoodat de onbekenden niet onmiddellijk uit 22 en 23 te berekenen zijn. Men moet de juiste oplossing dan trapsgewijze benaderen, waarbij men eerst het vertikaal en horizontaal getij aan den mond, dus z_0 en s_0 , zoo nauwkeurig mogelijk bepaalt, waarmede het vraagstuk tot het eerste randprobleem teruggebracht is. Opgemerkt wordt hierbij, dat in de praktijk zelden z_0 en s_0 samen als randvoorwaarden gegeven zijn en men dus bijna steeds met een der andere randproblemen te maken heeft.

2. Gegeven het vertikale getij op twee plaatsen.

Dit probleem is alleen als zoodanig te behandelen, wanneer de afstand tusschen de twee gegeven getijlijnen niet te groot is. Deze afstand mag, wanneer 22 en 23 gebruikt worden, de maximum vaklengte niet overschrijden. Is hij grooter, dan mag met de tweede benadering geen genoegen worden genomen en zal eerst gerekend moeten worden met vergelijkingen voor z en s welke uit een derde benadering van de reeksen 19 en 20 verkregen worden (zie blz. 58).

Is de afstand ook voor een derde benadering te groot, dan moet het probleem beschouwd worden als behoorende onder 3 (blz. 28), waarbij dan naast een der gegeven twee getijlijnen de opperwaterafvoer als randvoorwaarde ingevoerd wordt. Hier zal alleen het geval beschouwd worden dat de getijlijnen aan het begin en einde van een vak gegeven zijn en hun afstand dus voldoende klein is om met de vergelijkingen 22 en 23 te mogen rekenen. In 22 zijn de grootheden z_0 en z gegeven en de termen e en f te berekenen. Onbekend zijn alle termen met s_0 en \dot{s}_0 , dus a , b , c en d . De bekende termen vat men nu samen tot een functie $z(t)$, waarvan men de waarde voor ieder tijdstip t_0 waarop men den stroom s_0 berekenen wil, bepalen kan. Kiest men dit tijdstip ongeveer halverwege hoog- en laagwater, dan mag de functie $z(t)$ over een kort interval van ca. 20 à 30 minuten door een lineaire functie benaderd worden.

Voor zoo'n interval $t_1 - t_0$ kan men dus dan stellen:

$$z(t) = \alpha(t - t_0) + \beta.$$

In de nabijheid van het tijdstip t_0 is 22 dan herleid tot

$$\alpha(t-t_0) + \beta = (P \cdot \dot{s}_0 + Q \cdot s_0 \dot{s}_0 + R \cdot s_0 \cdot \dot{z}_0) x + Q \cdot B \cdot s_0 \cdot \dot{z}_0 \cdot x^2 \quad 22'$$

In het rechterlid komt behalve de onbekenden s_0 en \dot{s}_0 nog de factor \dot{z}_0 als veranderlijke voor. Men neemt nu verder aan, dat z_0 in het beschouwde interval constant is, en benadert dus z_0 in het interval $t_1 - t_0$ door een rechte, n.l. de raaklijn $t_0^+)$, en stelt dan:

$$z_0 = a_0 + a_1(t-t_0) \quad \text{en} \quad \dot{z}_0 = a_1.$$

Tenslotte neemt men ook nog aan, dat \dot{s}_0 in het beschouwde interval constant is en benadert dus s_0 eveneens door een raaklijn en schrijft:

$$s_0 = p_0 + p_1(t - t_0) \quad 38.$$

Substitueert men nu 38 in 22', dan kunnen p_0 en p_1 opgelost worden en is dus de stroom s_0 op het tijdstip t_0 benevens de raaklijn aan de stroomkromme in dit punt bepaald. Voor meerdere tijdstippen, niet te ver van den middenstand gelegen, kan men aldus den stroom s_0 berekenen. Op deze wijze is in de eerste plaats gemakkelijk het tijdstip te bepalen waarop de maximum stroom optreedt en vervolgens de waarde hiervan. Dan geldt n.l. $s_0 = p_0$ en $p_1 = 0$, waaruit dan weer volgt $\alpha = 0$, dus $\frac{\partial z(t)}{\partial t} = 0$.

Heeft men voor een bepaald tijdstip op bovengenoemde wijze den stroom s_0 berekend, dan kunnen volgens een minder bewerkelijke methode de waarden van s_0 in de onmiddellijke omgeving van t_0 gevonden worden, door s_0 voor te stellen door een reeks van Taylor. Op deze methode zal hier echter niet verder worden ingegaan.

Men vindt zoo het verloop van s_0 voor bepaalde gedeelten van vloed- en ebstroom, gelegen om en nabij de tijdstippen van maximum stroom. In de buurt van de kenteringen mag deze methode niet worden aangewend, daar de uitkomsten hier te veel van de werkelijkheid zouden afwijken. Wel kunnen de tijdstippen van kentering nauwkeurig bepaald worden.

Met behulp van de aldus verkregen gegevens kan nu het verloop van de stroomkromme s_0 tamelijk wel geschetst worden, waarbij de berekende raaklijnen een contrôle vormen. Uitgaande van deze benaderde s_0 en de gegeven z_0 berekent men nu uit 22

+) Bij de bepaling van $z(t)$ wordt geen lineair verloop van z_0 aangenomen zoodat hier \ddot{z}_0 niet verwaarloosd is.

en 23 z_1 en s_1 , dus vertikaal en horizontaal getij aan het andere vakeinde. Uit de verschillen die men dan vindt tusschen de aldus berekende z_1 en de als randvoorwaarde gegeven z_1 kan men opmaken of de stroom s_0 voldoende nauwkeurig bepaald werd en wordt de berekening zoonoodig verbeterd. Het vraagstuk is dan teruggebracht tot het eerste randprobleem.

3. Gegeven het vertikale getij op één plaats en de stroom op een ander punt.

Evenals bij het tweede randprobleem mogen ook hier de plaatsen waarvoor de randvoorwaarden gelden niet te ver van elkander verwijderd zijn, bij voorkeur niet verder dan een vaklengte. Stellen we dus dat aan het begin van een vak z_0 en aan het eind van dat vak s_1 gegeven is.

Men begint met aan te nemen dat $\dot{z}_1 = \dot{z}_0$. Uit 23 kan men dan, wanneer men $+x$ door $-x$ vervangt, s_0 bij benadering uit s_1 en z_0 berekenen. Alsdan heeft men het vraagstuk teruggebracht tot het eerste randprobleem.

4. Gegeven het vertikale getij z_0 aan den mond en de opperwaterafvoer S .

Dit probleem komt het meeste voor, maar biedt tevens de grootste moeilijkheden. Men brengt ook dit vraagstuk eerst door tragsgewijze benaderen terug tot het eerste randprobleem. In het kort gaat men hierbij als volgt te werk:

Uit de gegeven getijkromme z_0 in den mond bepaalt men langs grafischen weg (met een z.g. harmonischen analysator, b.v. van Mader-Ott) het z.g. schijnbare M_2 getij (zie blz. 34 laatste alinea), d.w.z. men bepaalt de sinusoïde z'_0 met de frequentie van het M_2 getij die de gegeven getijkromme het beste benadert. Volgens de methode Mazure bepaalt men dan de voortplanting van dit M_2 getij en vindt zoo op iedere vakgrens een M_2 sinusoïde voor het vertikale getij. Men neemt nu als eerste benadering aan dat het werkelijke getij zich vanaf den mond op analoge wijze voortplant als dit berekende getij, dus dat het bij zijn voortplanting evenveel gedempt en vertraagd wordt. Uitgaande van de bekende verhoudingen tusschen z_0 en z'_0 in den mond wordt dan op iedere vakgrens het vertikaal getij uit het voor deze plaats berekende M_2 getij door schatting bepaald.

Daar uit den aard der zaak bij de berekening van het M_2 getij niet met vervormingen rekening kan worden gehouden ondergaat ook het hieruit afgeleide getij geen vervorming, d.w.z. het blijft bij zijn voortplanting gelijkvormig aan z_0 . Nabij den mond is de verwaarloozing van deze vervorming van weinig belang. Komt men echter hooger op de rivier, dan moet hiermede wel

rekening worden gehouden. Hierbij mag men dan globaal aannemen dat de vervormingen pas een rol gaan spelen vanaf het punt waar de amplitude van het berekende M_2 getij sterker begint te veranderen. Stel dat dit zoo is na het n^e vak. Voor dit punt berekent men nu, uitgaande van het uit het berekende M_2 getij afgeleide vertikale getij op de vakgrenzen door middel van kombergingsberekeningen den stroom. Daarna berekent men de voortplanting van het getij vanaf dit punt stroomopwaarts volgens het eerste randprobleem, uitgaande van de benaderde waterhoogte z_n en den benaderden stroom s_n in dit punt en moet men uitkomen op den constanten opperwaterafvoer S . Eventueel blijkt dan, dat het noodzakelijk is, om s_n te wijzigen (z_n wordt vastgehouden!) Men vindt zoo de vervormingen welke het getij op dit riviergedeelte ondergaat en den stroom s_n aan het eind van het n^e vak.

Uitgaande van deze nieuwe waarde voor s_n bepaalt men, weer door kombergingsberekeningen, den stroom in den mond en op de vakgrenzen. Op iedere vakgrens is dan van horizontaal en vertikaal getij een tweede benadering verkregen en men bepaalt nu van deze getijkrommen de eerste afgeleiden dus \dot{z} en \dot{s} . Uitgaande van deze grootheden zoekt men nu weer omgekeerd het verloop van stroom en waterhoogte op de vakgrenzen opnieuw te bepalen. Hierbij gaat men uit van de constante waterhoogte z_u op de plaats waar de getijbeweging uitgedempt is, welke als randvoorwaarde uit de gegeven opperwaterafvoer S afgeleid kan worden.

Door nu in 22 de termen e en f en in 23 de termen b' , c' en d' dus o.a. de grootheden \ddot{z}_0 en \ddot{s}_0 voor ieder vak te verwaarloozen, is het mogelijk om den stroom s_0 in den mond uit te drukken in z_0 en z_u , daar immers de 1e afgeleiden van z en s in eerste schatting als bekend verondersteld zijn. Voor het eerste vak luiden dan de vergelijkingen:

$$z_1 - z_0 = (P_0 \cdot \dot{s}_0 + Q_0 \cdot s_0^2 + R_0 \cdot s_0 \cdot \dot{z}_0) x_0 \pm Q_0 \cdot B_0 \cdot s_0 \cdot \dot{z}_0 \cdot x_0^2 \quad 22''_1$$

$$s_1 = s_0 + B_0 \cdot \dot{z}_0 \cdot x_0 \quad 23''_1$$

Voor het tweede vak:

$$z_2 - z_0 = (P_1 \cdot \dot{s}_1 + Q_1 \cdot s_1^2 + R_1 \cdot s_1 \cdot \dot{z}_1) x_1 \pm Q_1 \cdot B_1 \cdot s_1 \cdot \dot{z}_1 \cdot x_1^2 + (P_0 \cdot \dot{s}_0 + Q_0 \cdot s_0^2 + R_0 \cdot s_0 \cdot \dot{z}_0) x_0 \pm Q_0 \cdot B_0 \cdot s_0 \cdot \dot{z}_0 \cdot x_0^2 \quad 22''_2$$

$$s_2 = s_0 + B_0 \cdot \dot{z}_0 \cdot x_0 + B_1 \cdot \dot{z}_1 \cdot x_1 \quad 23''_2$$

In de rechterleden van deze vergelijkingen komt als eenige onbekende grootheid s_0 voor, daar s_1 in $22''$ met behulp van $23_1''$ uitgedrukt kan worden in s_0 . Op deze wijze kan nu eerst s_0 berekend worden, door de vergelijking $22_u''$ op te stellen, waarbij dan in het linkerlid het verval $z_u - z_0$ verschijnt, dat bekend is. Door dan de uit deze vergelijking bepaalde s_0 te substitueeren in de vergelijkingen $23''$ kan dan achtereenvolgens de stroom op de verschillende vakgrenzen berekend worden. Tenslotte worden deze waarden van s gesubstitueerd in $22''$, waaruit dan de waterhoogten z op de vakgrenzen bepaald kunnen worden. Men krijgt zoo overal nieuwe waarden voor z en s , zoodat nieuwe krommen geschetst kunnen worden, waaruit men weer de \dot{z} en \dot{s} afgeleiden van z en s , dus \dot{z} en \dot{s} bepalen kan. Er kan dan nagegaan worden in hoeverre deze nieuwe \dot{z} en \dot{s} verschillen van de waarden voor deze grootheden, waarvan men oorspronkelijk uitging. Zijn die verschillen goed merkbaar, dan voert men de geheele berekening nog eens uit met de gecorrigeerde waarden voor \dot{z} en \dot{s} en vindt dan, behalve een verbeterde s_0 , weer andere waarden voor \dot{z} en \dot{s} . Op deze wijze rekest men voort, totdat een nieuwe wijziging van \dot{z} en \dot{s} geen noemenswaardige verandering in s_0 meer tot gevolg heeft. Alsdan beschouwt men het vraagstuk verder als een randprobleem van de eerste soort en berekent het getij op de rivier, nu uitgaande van waterhoogte en stroom in den mond als randvoorwaarden, dus van z_0 en s_0 .

Opgemerkt wordt nog, dat het bij dit vierde randprobleem niet altijd noodig zal zijn om voor een eerste benadering van de getijbeweging de methode Mazure toe te passen, dus het M_2 getij te berekenen. Vaak zal n.l. reeds een bepaalde verticale getijbeweging in het betreffende gebied door meting bekend zijn. In zoo'n geval gebruikt men dan dit getij als vergelijkingsbasis en blijft de berekening van het M_2 getij achterwege.

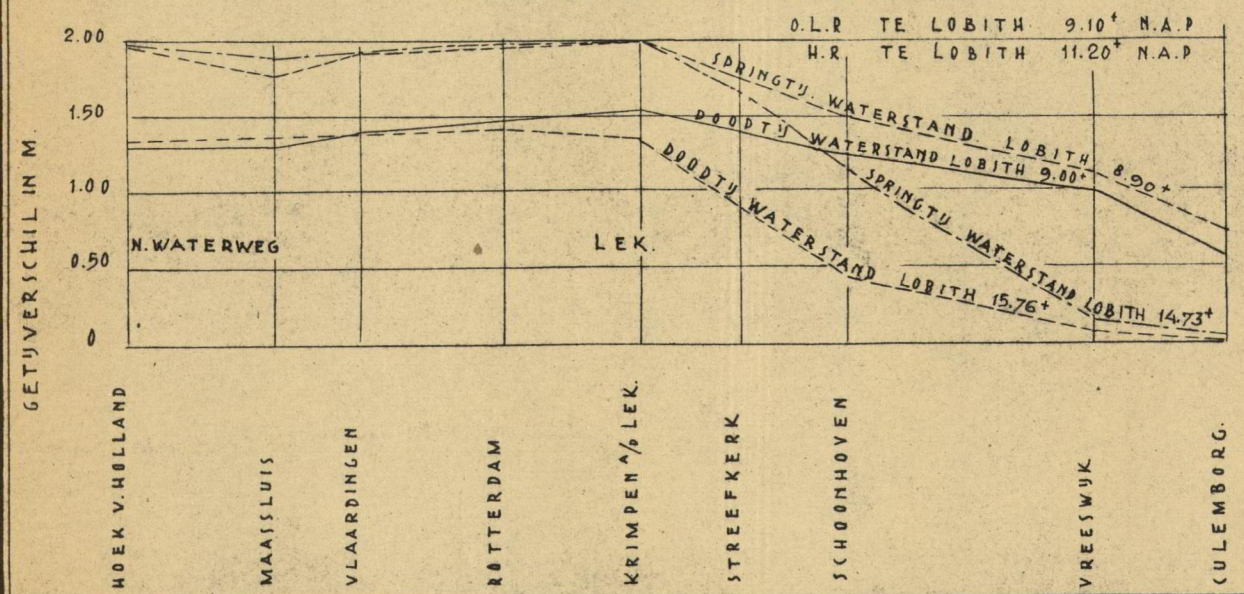
LITERATUUR.

- D a r w i n, G.H. Ebbe und Flut
Leipzig - Berlijn. B.G. Teubner. 1911.
- D r o n k e r s, J.J. Een getijberekening voor benedenrivieren.
De Ingenieur 1935 no.3¹4.
- D r o n k e r s, J.J. Verslag betreffende de stormvloedberekeningen
volgens de exacte methode,
Archief directie Benedenrivieren van den
Rijkswaterstaat.
- L u y m e s, J.L.H. Overzicht der getijleer, ten dienste der
hydrografische opneming.
's-Gravenhage - Algemeene Landsdrukkerij
1919.
- M a z u r e, J.P. De berekening van getijden en stormvloedden
op benedenrivieren.
Den Haag, Cerretsen. 1937.
- v.d. S t o k, J.P. Elementaire theorie der getijden. Getij-
constanten in den Indischen Archipel.
Kon. Meteorologisch Instituut, no.102; mede-
deelingen en verhandelingen no.8.
Utrecht, Kemink en Zn. 1910.
- v.d. S t o k, J.P. Etudes des phénomènes de marée sur les cotes
néerlandaises.
Kon. Meteorologisch Instituut, no.90.
Utrecht, Kemink en Zn. 1904.
- T h o r a d e, H. Ebbe und Flut.
Berlijn, Julius Springer. 1941.
- S t a a t s c o m m i s - Verslag.
s i e Z u i d e r z e e 's-Gravenhage - Algemeene Landsdrukkerij
1916.

TABEL I UITDEMPING VAN HET GETIJ OP DE LEK EN DE WAAL BIJ VERSCHILLENDE OPPERWATERAFVOEREN.

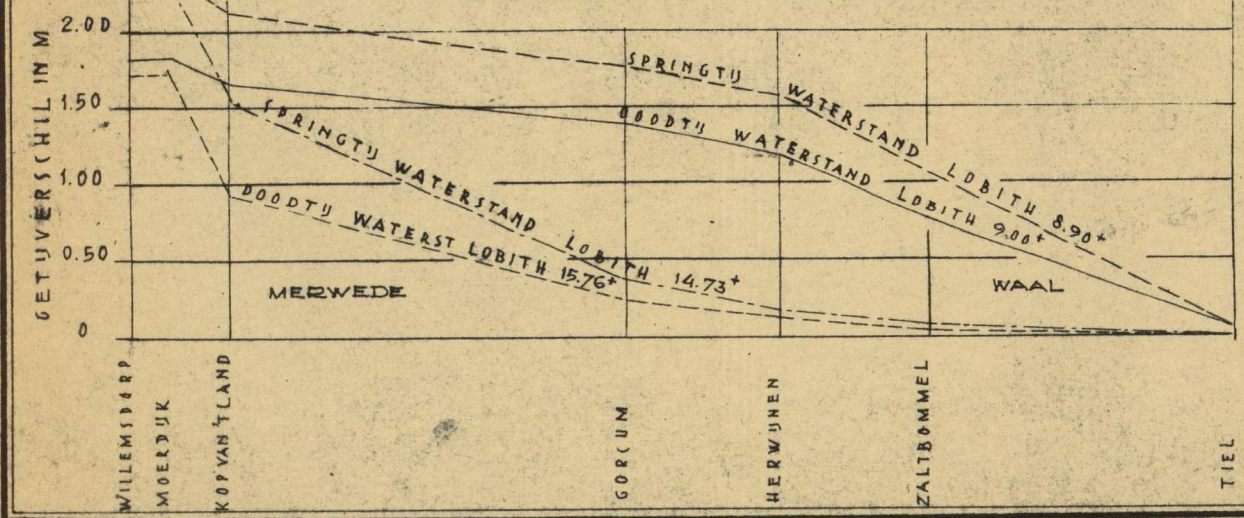
| WATERSTAND LOBITH | 9.00 ⁺ | 8.90 ⁺ | 15.76 ⁺ | 14.73 ⁺ |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| | TIJVERSCHIL | | | |
| STATION | DOODTJ | SPRINGTJ | DOODTJ | SPRINGTJ |
| HOEK VAN HOLLAND | 1.29 | 1.95 | 1.30 | 1.99 |
| MAASSLUIS | 1.29 | 1.75 | 1.35 | 1.88 |
| VLAARDINGEN | 1.38 | 1.87 | 1.37 | 1.88 |
| ROTTERDAM | 1.45 | 1.94 | 1.40 | 1.96 |
| KRIMPEN AD LEK | 1.51 | 1.97 | 1.31 | 1.98 |
| STREEFKERK | 1.38 | 1.73 | 0.86 | 1.66 |
| SCHOONHOVEN | 1.21 | 1.48 | 0.44 | 1.13 |
| VREESWIJK | 0.99 | 1.15 | 0.08 | 0.19 |
| CULEMBORG. | 0.56 | 0.75 | 0.03 | 0.03 |

GRAFISCHE VOORSTELLING



| | | | | |
|----------------|------|------|------|------|
| WILLEMSDORP | 1.78 | 2.34 | 1.69 | 2.29 |
| MOERDIJK | 1.80 | 2.38 | 1.69 | 2.27 |
| KOP V. I. LAND | 1.64 | 2.08 | 0.92 | 1.53 |
| GORKUM | 1.41 | 1.76 | 0.24 | 0.37 |
| HERWIJNEN | 1.19 | 1.55 | 0.12 | 0.16 |
| ZALTBOMMEL | 0.76 | 1.07 | 0.05 | 0.06 |
| TIEL | 0.05 | 0.06 | - | - |

GRAFISCHE VOORSTELLING



TABEL II ASTRONOMISCHE GETIJDEN

| GETIJ | HOEK SNELHEID | AMPLITUDE TE VLISSINGEN | AMPLITUDE TE HOEK VAN HOLLAND |
|-------|---------------|-------------------------|-------------------------------|
| M2 | 28.98° | 172 cm | 80 cm |
| S2 | 30° | 45 " | 18 " |
| K1 | 15.04° | 6 " | 7 " |
| K2 | 30.08° | 14 " | 5 " |
| O | 13.94° | 11 " | 11 " |
| P | 14.96° | 2 " | 3 " |
| N | 28.44° | 28 " | 11 " |

TABEL III SAMENGESTELDE ASTRONOMISCHE GETIJDEN

| GETIJ | HOEKSNELHEID | AMPLITUDE TE VLISSINGEN |
|-------|--------------|-------------------------|
| M3 | 58.98° | 7 CM |
| 2 M3 | 27.96° | 11 CM |

NAAR: HAVERKAMP, ZEEVAARTT. TAFELS.

TABEL IV BOVENGETIJDEN IN ZEE

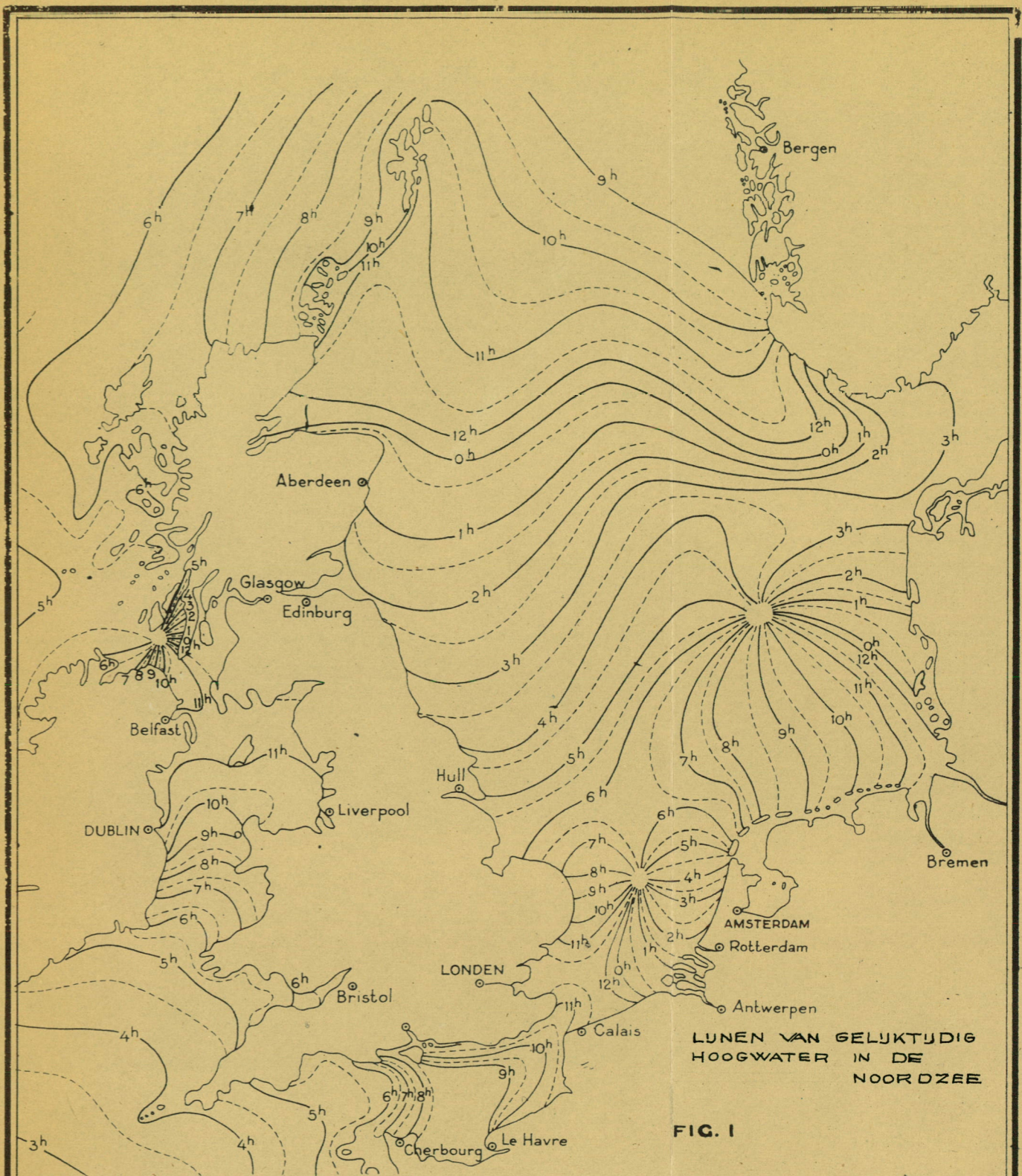
| STATION | AMPLITUDE IN CM | | | |
|------------------|-----------------|---------|--------|---------|
| | M2 | M4 | M6 | S2 |
| VLISSINGEN | 169.8 cm | 11.9 cm | 9.7 cm | 45.4 cm |
| HOEK VAN HOLLAND | 76.4 " | 17.2 " | 4.0 " | 18.0 " |
| SCHIEVENINGEN | 70.8 " | 19.3 " | 2.9 " | 16.9 " |
| IJMUIDEN | 65.7 " | 18.0 " | 3.8 " | 16.3 " |
| VLIELAND | 67.1 " | 3.4 " | 4.5 " | 17.5 " |

NAAR: V. BERESTEYN, GETYJKROMMEN NED. KUST EN RIVIEREN.

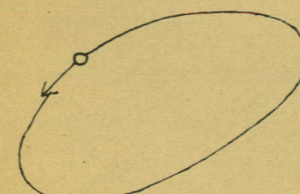
TABEL V BOVENGETIJDEN OP RIVIEREN

NAAR V. BERESTEYN, GETYJKROMMEN NED. KUST EN RIVIEREN

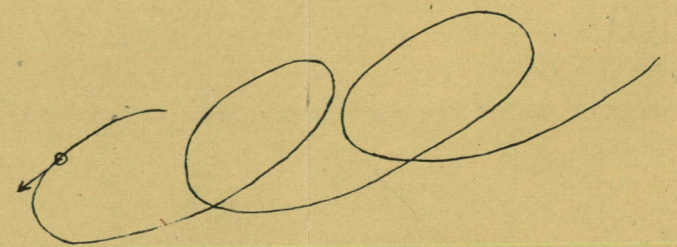
| STATION | DUBBELE GETIJAMPL IN CM | | | | VERHOUDING AMPL | | VERSCH AMPL (M2+M4+M6)-M2 | VERSCHUIVING IN TIJD VAN HOOG-EN LAAG- WATER M2+M4+M6 TOX.M2 | |
|-------------|-------------------------|----|----|----------|-----------------|-------|------------------------------|--|-----------------------|
| | M2 | M4 | M6 | M2+M4+M6 | M2:M4 | M2:M6 | | H.W. VROEGER IN MIN. | L.W. LATER IN MIN. |
| ROTTERDAM | 134 | 22 | 5 | 136 | 6 | 27 | 2 | 32 | 49 |
| KRIMPEN | 133 | 22 | 5 | 135 | 6 | 27 | 2 | 33 | 52 |
| STREEFKERK | 113 | 22 | 5 | 118 | 5 | 23 | 5 | 37 | 54 |
| SCHOONHOVEN | 88 | 19 | 4 | 93 | 4.5 | 22 | 5 | 43 | 54 |
| VREESWIJK | 17 | 4 | 1 | 18 | 4 | 17 | 1 | 51 | 49 |
| WILLEMSDORP | 186 | 25 | 6 | 188 | 7.5 | 31 | 2 | 29 | 26 |
| GORKUM | 73 | 18 | 4 | 78 | 4 | 18 | 5 | 46 | 64 |
| HERWIJNEN | 37 | 9 | 3 | 40 | 4 | 12 | 3 | 51 | 71 |
| ZALTBOMMEL | 12 | 3 | - | 13 | 4 | - | 1 | 43 | 55 |



BAAN VAN EEN WATERDEELTJE ONDER DE INVLOED
VAN EEN GETUUSTROOM (DRAAISTROOM)

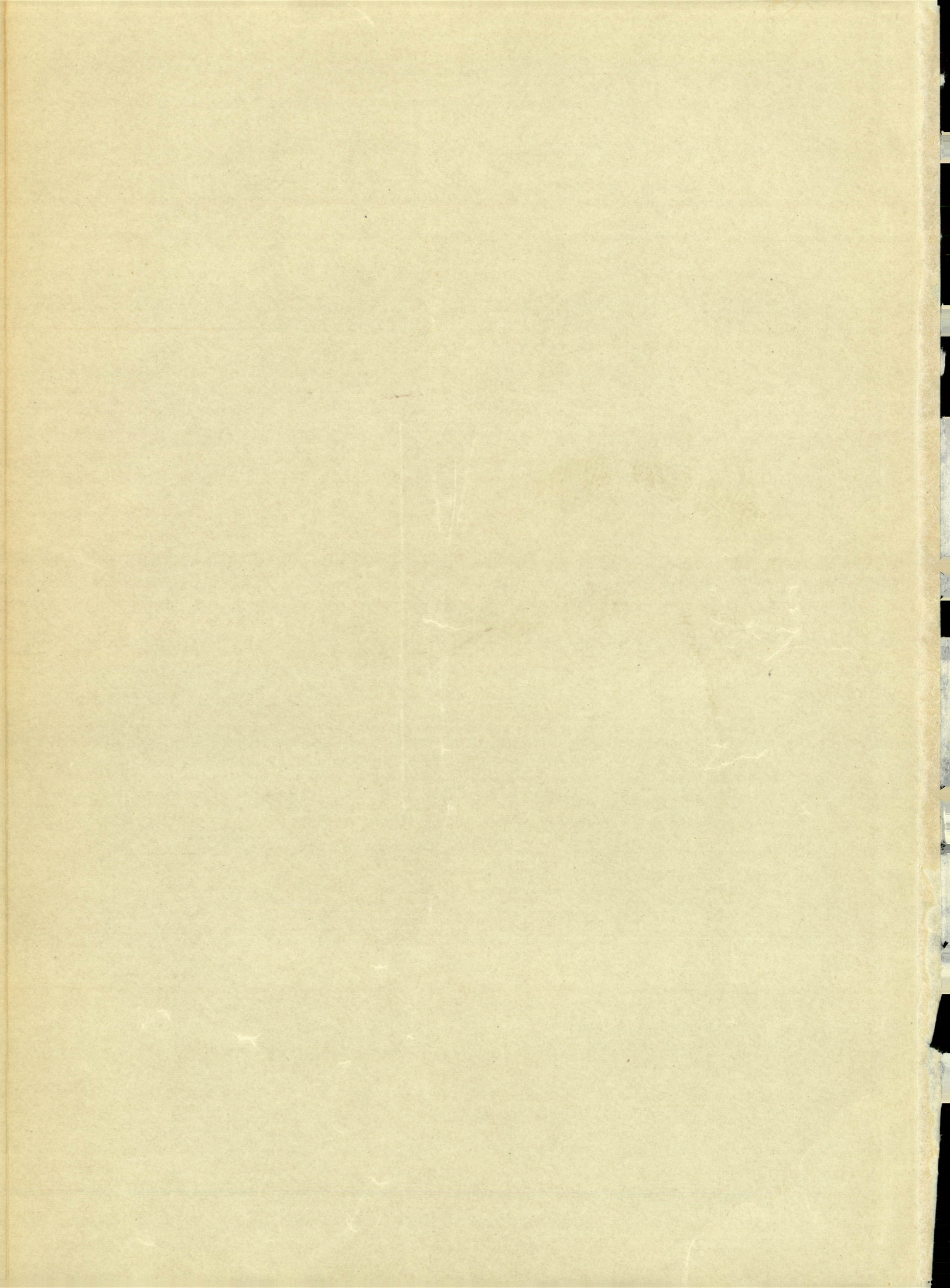
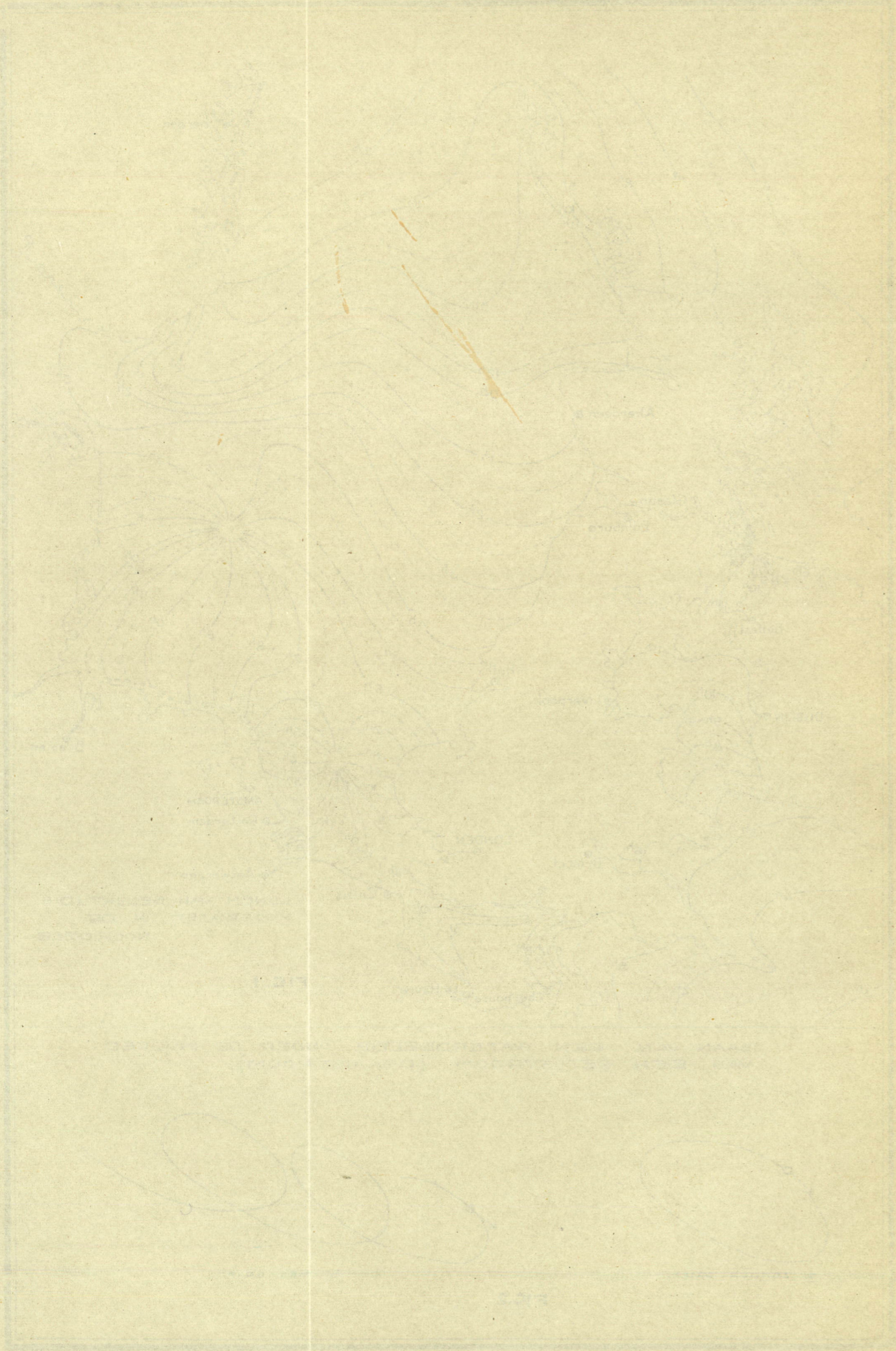


a. ZONDER DRIFT.



b. MET DRIFT.

FIG. 2



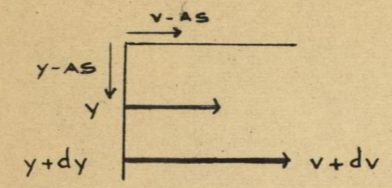


FIG. 3

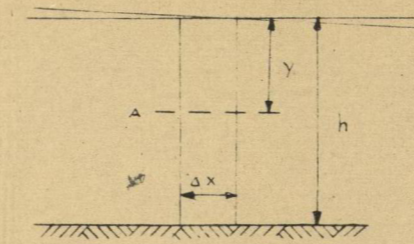
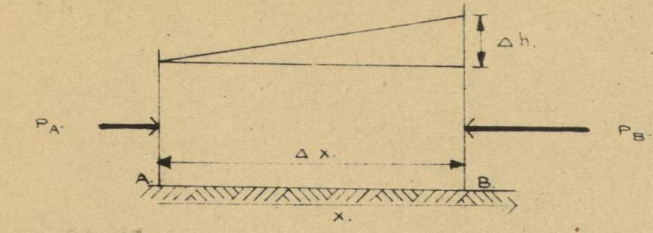


FIG. 4



$P_A - P_B = -\int \rho \Delta h$

FIG. 11

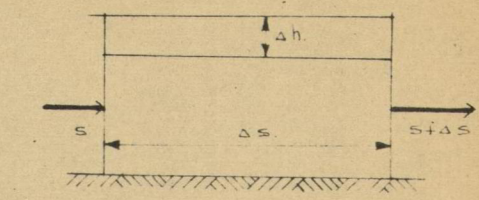


FIG. 12

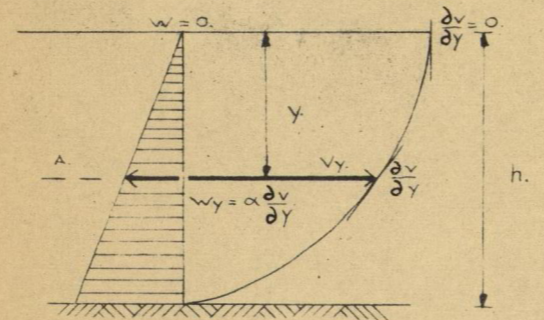


FIG. 5

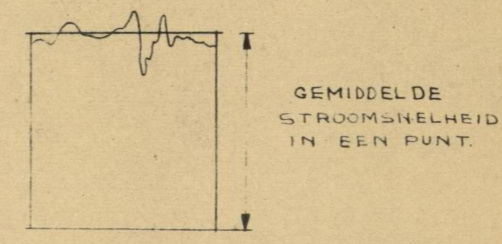


FIG. 6

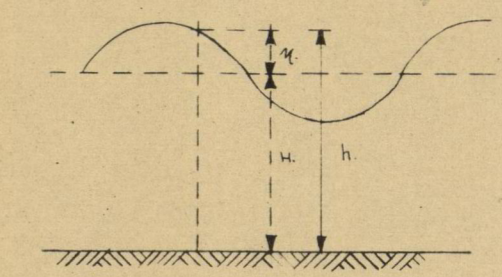


FIG. 13

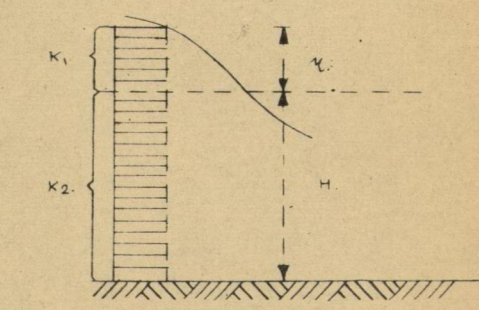


FIG. 14

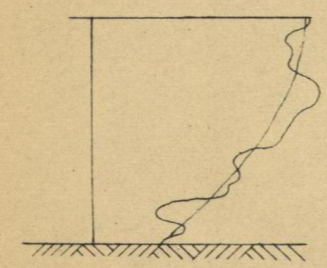
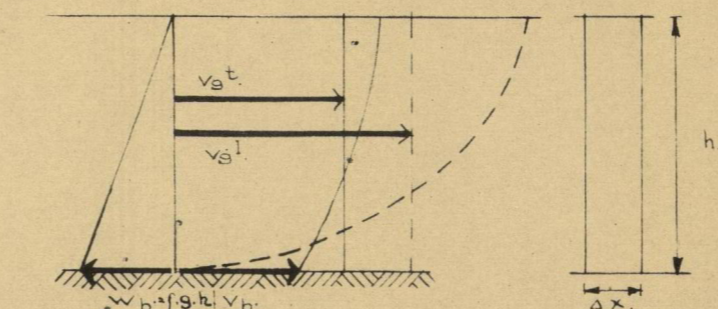


FIG. 7



$w = \rho \cdot g \cdot h \cdot v_b$
 $v_g^t = \text{GEM. STROOMSNELHEID BIJ TURBULENTE STROOMING.}$
 $v_g^l = \text{GEM. STROOMSNELHEID BIJ LAMINAIRE STROOMING.}$

FIG. 8

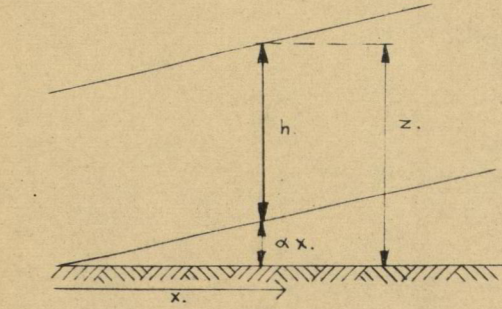
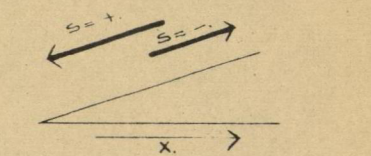


FIG. 15



VLOEDSTROOM = $-\frac{\partial h}{\partial x}$
 EBSTROOM = +
 VLOEDVERHANG = $-\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = -$
 EBVERHANG = $+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = +$

KEUZE DER TEKENS VOLGENS DRONKERS

FIG. 16

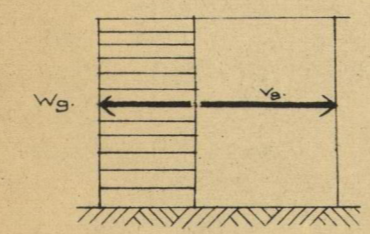


FIG. 9

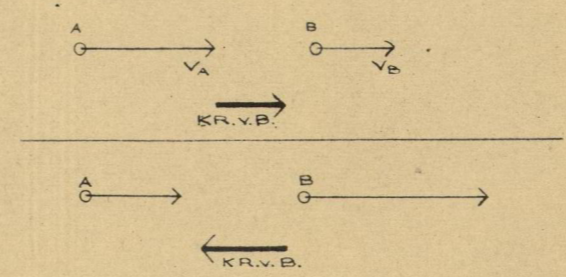


FIG. 10



VLOEDSTROOM = +
 EBSTROOM = +
 VLOEDVERHANG = +
 EBVERHANG = +

KEUZE DER TEKENS VOLGENS MAZURE

FIG. 17