Bibliotheek - Uitleenkaart

rijkswaterstaat directie gelderland

postbus 9070
6800 ED Arnhem
telefoon 085 - 68 83 55 / 68 83 05

Titel: Inleiding tot de getijdeberekening

Naam lezer	Datum	Retour voor

Evt. verlenging uitleenperiode tijdig aanvragen.

Bibliotheek - Uitleenkaart

Titel: Inleiding tot de getijdeberekening

Naam lezer	Datum	Retour voor

Rappelen

Naam lezer	1e	2e	3e	4e

INLEIDING TOT DE GETIJBEREKENING

DOOR

Ir. H. A. F E R G U S O N

Inleiding tot de getijberekening.

Verklaring der gebezigde teekens.

b = stroomvoerende breedte

b_w = stroomvoerende breedte in de oppervlakte (bij trapeziumvormig profiel).

B = kombergende breedte.

g = versnelling van de zwaartekracht.

h = waterdiepte.

H = waterdiepte in den middenstand.

n = frequentie van het M_2 getij. $n = \frac{2\pi}{T} = 1,4.10^{-4}$ rad./sec.

p = fasegrootheid (np = fasehoek).

r = voortplantingscoefficent.

s = stroom, s_g = getijstroom.

S = opperwaterafvoer.

t = tijd.

T = periode van het M_2 getij = 12 h.25 min.

v = stroomsnelheid.

w = voortplantingssnelheid.

z = hoogte van den waterspiegel ten opzichte van een horizontaal vlak.

η = verheffing van den waterspiegel t.o.v. den middenstand.

ρ = dichtheid.

σ = dempingsfactor.

Verder stellen $\dot{z}_1$ $\ddot{z}_1$ $\dot{s}_1$ $\ddot{s}_1$ $\dot{Q}$ enz. voor de partieele afgeleiden naar den tijd van de grootheden z_1 s_1 Q enz. dus resp.:

$\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, $\frac{\partial s}{\partial t}$, enz. (zie noot onderaan blz. 57)

----

1. Algemeene beschouwingen over het karakter van de getijbeweging in de Nederlandsche Wateren. (Voor de figuren zie bijlage 2).

De getijbeweging, die wij voor onze kust waarnemen wordt in hoofdzaak veroorzaakt door een getijgolf welke uit den Atlantischen Oceaan komende, de Noordzee door het Nauw van Calais en om Schotland heen binnenloopt.

Fig. 1. In fig. 1 is voor het noordzeegetij het verloop van het hoogwater voorgesteld. Vreemd mogen hierbij op het eerste gezicht de twee linksche draaiïngen lijken om de z.g. amphidromien of getijlooze punten. Deze z.g. draaigetijden (Duitsch: Drehtide) ontstaan bij terugkaatsing van de binnenloopende getijgolf en ten gevolge van de afwijking, welke de getijstroom ondergaat door de aardrotatie (z.g. kracht van Coriolis). Een aanschouwelijke verklaring van het ontstaan van een draaigetij is te vinden in het bevattelijk geschreven boekje van H. Thorade: "Ebbe und Flut" blz. 87 e.v. Naast de uit den Atlantischen Oceaan afkomstige getijgolven heeft de Noordzee ook nog een z.g. eigen getijbeweging, welke veroorzaakt wordt door den directen invloed van zon en maan op het noordzeewater. Deze beweging is echter klein ten opzichte van het oceaangetij. Een indruk van de mogelijke grootte van dit getij kan verkregen worden uit de cijfers welke van de "eigen" getijden van de Middellandsche Zee en de Zwarte Zee bekend zijn. In de Middellandsche Zee kan een getijverschil van 30 cm., in de Zwarte Zee een getijverschil van 8 cm. voorkomen (Thorade). De eigen getijbeweging op de Noordzee houdt mogelijk het midden tusschen deze twee waarden, haar amplitude is echter zeker kleiner dan 30 cm. Hiertegenover staat dan, dat het getijverschil langs de kusten van de zuidelijke Noordzee vaak enkele meters kan bedragen, zoodat dit getij voornamelijk veroorzaakt moet worden door de getijgolf uit den oceaan. Hierbij spelen dan interferentieverschijnselen een groote rol.

Bij onze getijberekeningen hebben we te maken met het getij zooals dit onmiddellijk voor onze kust optreedt. Dit is het krachtigst in het zuiden (tijverschil te Vlissingen gem: 3,72 m), terwijl het naar het noorden tot ongeveer ter hoogte van IJmuiden (gem. tijverschil ongeveer 1,59 m.), regelmatig afneemt. Langs de Noordhollandsche en Friesche eilanden neemt het tijverschil dan weer in oostelijke richting toe.

De golfbeweging in de Noordzee heeft normaal een regelmatig dubbeldaagsch karakter, met een gemiddelde periode van 12h25m., d.i. de gemiddelde halve omlooptijd van de maan om de aarde. Onder periode wordt dan in het algemeen verstaan het tijdsverloop tusschen twee-opvolgende hoogwaters. De afwijking

van de gemiddelde periode kan ook onder normale meteorologische omstandigheden, betrekkelijk groot zijn. Een andere onregelmatigheid wordt veroorzaakt door de z.g. dagelijksche ongelijkheid, waaronder verstaan wordt het verschil in hoogte tusschen twee opvolgende astronomische hoogwaters, resp. laagwaters (meteorologische invloeden zijn hierbij uitgeschakeld). Zie voor een populaire verklaring van dit laatste verschijnsel: Darwin, Ebbe und Flut, Blz. 101 e.v.
Voorts kennen we dan nog de halfmaandelijksche schommeling van het tijverschil met een minimum bij z.g. doodtij en een maximum bij z.g. springtij. (Voor definitie van spring- en doodtij, zie blz. 33.) Al deze afwijkingen van den zuiver sinusoidalen vorm dragen zelf weer een periodiek karakter.

De snelheid waarmede de getijgolf zich voortplant is afhankelijk van de waterdiepte en van den weerstand welke de getijstroom ondervindt. Is de diepte in verhouding tot de amplitude van de getijbeweging groot, zooals langs onze kust het geval is, dan is de voortplantingssnelheid w ongeveer gelijk aan den wortel uit het product van de gemiddelde waterdiepte en de versnelling van de zwaartekracht, dus $w = \sqrt{gH}$. Bij een diepte van 20 m. vinden we dus een snelheid van 50 km/h., zoodat bij een periode van 12h25m de golflengte dan ruim 600 km. bedraagt. Voor een diepte van 5000 m., d.w.z. ongeveer de gemiddelde diepte van de oceanen is de voortplantingssnelheid ongeveer 800 km/h. en de golflengte ca. 10.000 km. De waterdiepte is in deze beide gevallen dus zeer gering vergeleken met de golflengte. Pas wanneer de diepte grooter is dan de halve golflengte noemen we het water diep ten opzichte van de golf, en in dat geval is dan bij den bodem nauwelijks meer een beweging waarneembaar, ook al zou de golfbeweging geen weerstand van den bodem ondervinden. "Diepwatergolven" zijn b.v. alle korte golven welke door den invloed van den wind op het water ontstaan. Bij de lange getijgolven is echter de strooming bij den bodem belangrijk, hoewel zij tengevolge van den weerstand welke zij van den bodem ondervindt zwakker is dan de stroom aan de oppervlakte.

Een belangrijke eigenschap van de getijgolf is de geringe snelheid waarmede de waterspiegel rijst en daalt. De vertikale snelheid van de waterdeeltjes is derhalve steeds zoo klein, dat zij bij de berekeningen verwaarloosd mag worden. Wanneer dan ook sprake is van het vertikale getij, dan wordt hiermede alleen bedoeld de schommeling in vertikalen zin van den waterspiegel en niet een beweging in vertikalen zin van waterdeeltjes.

Onder horizontaal getij wordt verder verstaan het periodiek heen en weer stroomen van het water, evenwijdig aan den waterspiegel (de helling, welke de waterspiegel onder invloed van de getijbeweging kan aannemen kan hoogstens enkele cm. per km. bedragen).

Van de horizontale waterbeweging vormt men zich het gemakkelijkst een denkbeeld wanneer men een waterdeeltje op zijn weg volgt. Wij stellen ons hierbij eenvoudigheidshalve voor, dat de beweging niet turbulent is (dus zonder wervels) en dat een waterdeeltje steeds in dezelfde horizontale laag

Fig. 2. blijft. Men kan dan twee bewegingsvormen onderscheiden (fig.2). Bij de eene beschrijft ieder deeltje een in zichzelf gesloten baan, bij de andere ondergaat het een resulteerende verplaatsing. De resulteerende stroom wordt driftstroom genoemd; langs onze kust wordt een drift in noordelijke richting waargenomen, daar de vloedstroom over het algemeen sterker is dan de ebstroom.

Nadert de baan van de waterdeeltjes den cirkelvorm dan spreekt men van draaistroom. De overgangen tusschen vloed- en ebstroom zijn dan moeilijk aan te geven. Zulke draaistroomen vindt men o.a. in het aan den Scheldemond grenzende zeegebied, waar zij ontstaan onder invloed van dezen mond. Heeft de baan van de deeltjes een gestrekten vorm, zoodat de stroom slechts in twee richtingen van belang wordt, dan spreekt men van een gestrekten stroom en maakt dan ook een duidelijk onderscheid tusschen vloed- en ebstroom. Een gestrekte stroom treedt overal op waar aan den stroom voldoende leiding gegeven wordt door oevers, banken, kribben, enz.

Wanneer de waterdiepte zoo groot is dat de invloed van den bodemweerstand verwaarloosd mag worden en bovendien de getijgolf bij haar voortplanting niet gedempt of versterkt wordt door een terugkaatsing (interferentie), dan vallen de tijdstippen van maximum stroomsterkte samen met de tijdstippen van hoog- en laagwater. De stroomkentering vindt dan plaats wanneer de waterspiegel zich ongeveer in den middenstand bevindt. Bij de voor onze kust voorkomende waterdiepte van gemiddeld 20-30 m., is de invloed van den weerstand wel betrekkelijk gering, maar er treedt een sterke interferentie op, waardoor het tijverschil van Calais tot IJmuiden afneemt en daarna in oostelijke richting weer versterkt wordt. Bovendien is hier ook de kracht van Coriolis van beteekenis. Dientengevolge treedt het tijdstip van maximum stroom voor de Zeeuwsche kust ongeveer een uur na hoogwater op, terwijl voor de Noordhollandsche eilanden de stroom in fase ongeveer 2 uur voor is bij het vertikale getij, d.w.z. de maximum stroom treedt hier ongeveer 2 uur voor hoog- resp. laagwater op en de stroomkenteringen kort na hoog- resp. laagwater. Alleen ter hoogte van Hoek van Holland zijn horizontaal en vertikaal getij practisch in fase.

Uit de vertikale getijbeweging langs onze kust ontwikkelen zich de getijgolven welke zich op de zeearmen en rivieren voortplanten. Hoewel de getijbeweging langs de kust omgekeerd door de aanwezigheid van riviermonden en zeegaten beinvloed wordt, is deze invloed toch practisch zoo gering dat zij bij de getijberekeningen verwaarloosd wordt, tenzij de veranderingen in het riviersysteem zeer belangrijk zijn. Men neemt daarom aan, dat wèl de getijbeweging op rivier of zeearm een functie is van het getij aan den mond, maar niet omgekeerd. Zoo werd b.v. bij de berekening van de veranderingen in de getijbeweging op de Waddenzee tengevolge van de afsluiting van de Zuiderzee verondersteld, dat het vertikale getij voor de zeegaten hierdoor geen wijziging onderging. Wel veranderden de stroomen, vooral in het zeegat van Texel, aanzienlijk en hiermede werd dan ook wel rekening gehouden.

Bij de getijbeweging op onze rivieren en zeearmen speelt de weerstand een veel grootere rol dan op zee. Dit is een gevolg van de betrekkelijk geringe diepte van de stroomgeulen. De in verhouding tot de waterdiepte belangrijke bodemweerstand veroorzaakt een groote faseverschuiving van den stroom ten opzichte van het vertikale getij, verder een vermindering van de voortplantingssnelheid, een demping van de golfhoogte en een vervorming van de golf, waardoor deze bij haar voortplanting steeds meer van den sinusoidalen vorm afwijkt. Door de faseverschuiving vallen de tijdstippen van kentering kort na hoog- en laagwater (op een bovenrivier er vóór) en de maximum stroom wordt waargenomen wanneer de waterspiegel ongeveer in den middenstand is. De voortplantingssnelheid mag nu niet meer gelijkgesteld worden aan $\sqrt{gH}$. Om den relatief grooten weerstand te overwinnen welke de stroom ondervindt moet hét optredende verhang grooter zijn, dan overeen zou komen met een voortplantingssnelheid $\sqrt{gH}$, zoodat deze geringer wordt.

Als voorbeeld van de sterke vertraging welke een getijgolf door den weerstand kan ondervinden noemen we de getijvoortplanting in den Nieuwen Waterweg. De afstand tusschen Hoek van Holland en Rotterdam bedraagt ca. 30 km. Stelt men de gemiddelde diepte van den Nieuwen Waterweg op 8.00 m. dan is $\sqrt{gH}$ ongeveer 9 m/sec., zoodat volgens deze formule de golf zich in ongeveer 55 min. naar Rotterdam zou hebben voortgeplant. In werkelijkheid doet het getij er echter ongeveer 2 uur over en de voortplantingssnelheid bedraagt dus slechts ongeveer $0{,}5\sqrt{gH}$ of 4,5 m/sec.

Door den weerstand wordt verder veel energie vernietigd, waardoor de golfbeweging steeds meer verzwakt naarmate zij voortschrijdt, en tenslotte geheel uitsterft.

Omdat het tijverschil op rivieren meestal een betrekkelijk groote waarde heeft ten opzichte van de waterdiepte (veelal ongeveer 20%) is de weerstand welke de stroom bij laagwater ondervindt grooter dan bij hoogwater, zoodat het hoogwater zich sneller voortplant dan het laagwater. Dit heeft tot gevolg dat het tijdsverloop tusschen hoogwater en voorafgaand laagwater rivieropwaarts steeds kleiner wordt. Het water stijgt dan aanzienlijk sneller dan dat het daalt.

Wanneer een getijgolf zich op een rivier voortplant doet zich naast de getijbeweging ook de afvoer van het opperwater gelden. De ebstroom is dan sterker dan de vloedstroom. De opperwaterafvoer doet zich stroomopwaarts sterker gevoelen dan nabij den mond doordat het getij uitdempt. Deze demping neemt met grooter wordenden afvoer van de rivier toe. Om de

T A B E L I gedachten te bepalen zijn op bijlage 1 in tabel I en de bijbehoorende grafieken enkele voorbeelden van de demping van het getij bij verschillende opperwaterafvoeren en verschillende getijbeweging aan den mond, gegeven.

Voor een nauwkeurige bepaling van de getijbeweging op de Noordzee staan ons nog betrekkelijk weinig gegevens ter beschikking. Het verloop van het horizontale getij zoowel wat betreft richting als sterkte is nog wel te bepalen met behulp van de betrouwbare stroommeters welke tegenwoordig vervaardigd worden. De bepaling van het vertikale getij levert echter groote moeilijkheden op. Nauwkeurige gegevens bestaan hierover alleen voor bepaalde plaatsen langs de kust. Op zee kan de waterhoogte wel geregistreerd worden met z.g. dieptemeters, dat zijn zelf registreerende getijmeters waarbij door drukmeting de waterhoogte boven het instrument opgeteekend wordt. Deze instrumenten zijn echter sterk aan storingen onderhevig, zoodat zelden een behoorlijke registratie verkregen wordt. De grootste moeilijkheid is echter dat de waterhoogte hierbij niet aan een bekend peil vastgelegd wordt. Hoogstens kan men den middenstand van de gemeten kromme vergelijken met den middenstand in een nabijgelegen kuststation.

Over de getijbeweging op onze rivieren en zeearmen bestaan betere gegevens. Dit komt in de eerste plaats omdat het vertikale getij hier betrekkelijk gemakkelijk te meten is vanaf de oevers. De registraties van de getijmeters en de waarnemingen aan de peilschalen welke hier opgesteld zijn kunnen zonder meer betrokken worden op de geheele stroombreedte ter plaatse. Moeilijkheden worden hierbij alleen ondervonden op de Waddenzee en in mindere mate ook op onze breedere zee- en rivierarmen, b.v. het Hollandsch Diep en de Westerschelde. Vooral wat de Schelde betreft verdient het aanbeveling om het aantal bestaande getijmeters aanzienlijk uit te breiden, zoodat op verschillende plaatsen registraties aan beide oevers mogelijk worden.

Een verder gemak bij de getijberekening op onze rivieren en zeearmen levert de omstandigheid dat door oevers, kribben en zandbanken bijna steeds zooveel geleiding aan den getijstroom gegeven wordt, dat deze bijna volkomen gestrekt is, zoodat het probleem tot twee dimensies teruggebracht kan worden.

Tenslotte is hier de vorm van de stroombedding vastgelegd door talrijke loodingen, zoodat de profielen waardoor de waterbeweging plaats vindt voldoende nauwkeurig bekend zijn.

In het vorenstaande is in grove trekken het algemeene karakter van de getijbeweging geschetst zooals deze waargenomen wordt in het gebied waarvoor getijberekeningen uitgevoerd kunnen worden en in het zeegebied dat hieraan grenst. Het doel van een getijberekening zal nu steeds zijn, de waterbeweging in een bepaald gebied min of meer nauwkeurig, al naar gelang de eischen die men aan de resultaten stelt, te benaderen. Dit getijprobleem wordt beheerscht door drie factoren, welke alle even belangrijk zijn, n.l.:

1. De differentiaalvergelijkingen van de waterbeweging, waardoor de wetten vastgelegd worden door welke de beweging beheerscht wordt.
2. De profielsgrootheden, welke bepaald worden door den vorm en de afmetingen van de stroombedding.
3. De randvoorwaarden, welke volgen uit de waterbeweging aan de grenzen van het beschouwde gebied.

In het navolgende zullen nu eerst deze drie factoren afzonderlijk behandeld worden.

2. Afleiding van de differentiaalvergelijkingen voor een golfbeweging met groote golflengte en kleine amplitude in een kanaal met prismatische doorsnede. (Voor de figuren zie bijl.3).

De differentiaalvergelijkingen welke de algemeene beweging van een ideale vloeistof vastleggen zijn opgesteld door Euler. Deze dacht zich een vloeistof als samenstel van een oneindig aantal deeltjes, op ieder waarvan men de wet van Newton: Kracht = massa x versnelling kan toepassen. Hij nam verder aan dat de ruimte welke door de beschouwde vloeistof ingenomen wordt door deze deeltjes volkomen gevuld is. Het volume van ieder deeltje wordt dan gelijk gesteld aan de volume-eenheid. Daar verder de vloeistof homogeen gedacht is hebben de deeltjes gelijke soortelijke massa of dichtheid = ρ. +)

Uit het onvermogen der deeltjes om wrijvingskrachten over te brengen volgt, dat zij alleen een normalen druk op elkander kunnen uitoefenen, welke in alle richtingen even groot is. Dit begrip van alzijdige drukoverbrenging stelt ons in staat, den invloed van iedere kracht welke op de vloeistof in haar geheel werkt op de deeltjes afzonderlijk te bepalen. We kunnen dan voor ieder deeltje de wet van Newton gaan opstellen, welke het verband vastlegt tusschen de versnelling van dit deeltje en de op haar werkende krachten. Deze betrekking noemen we dan de bewegingsvergelijking.

Een tweede betrekking tusschen de deeltjes volgt uit de omstandigheid dat de vloeistof onsamendrukbaar wordt verondersteld, zoodat de dichtheid constant is. Toevoeging van waterdeeltjes moet dus tot volumevergrooting, afvloeiïng tot volumevermindering leiden. Deze eigenschap werd door Euler vastgelegd in de z.g. continuïteitsvergelijking, welke men ook inhoudsbalans zou kunnen noemen.

Wanneer men nu de vergelijkingen van Euler wil gaan toepassen op een vereenvoudigde waterbeweging, welke niet teveel verschilt van de getijbeweging in onze benedenrivieren en zeearmen, dan mag de vorm van deze vergelijkingen zeer vereenvoudigd worden. Men beschouwt dan n.l. een strooming in een net van geulen of kanalen waarbij alleen een beweging verondersteld wordt welke parallel verloopt aan den waterspiegel en onveranderlijk de richting van de geulas volgt. Zoowel de versnelling van de waterdeeltjes in vertikale richting als in de richting normaal op de geulas wordt dan buiten beschouwing gelaten, zoodat het algemeene driedimensionale probleem tot twee dimensies teruggebracht wordt. De verwaarloozing van de vertikale waterbeweging is geoorloofd omdat, zooals we reeds opmerkten, de snelheid waarmede de waterspiegel door de getijbeweging rijst en daalt zeer gering is tengevolge van de groote periode van het getij. Ook bij de beperking van de beweging in het horizontale vlak tot één richting benadert men de practijk voldoende door de leiding welke banken, kribben en oevers aan den stroom geven.

De Eulersche theorie kan nu echter nog niet zonder meer op de getijbeweging toegepast worden. Doordat n.l. hierbij uitgegaan werd van een ideale vloeistof, waarin geen inwendige wrijving optreedt, wordt in deze theorie niet met energieverlies door inwendigen weerstand gerekend. In de practijk speelt deze echter een belangrijke rol en mag dit niet verwaarloosd

---

+) Dit laatste is niet het geval in brakwater en ook niet bij temperatuurverschillen in de vloeistof (golfstroom).

worden. De theorie van Euler moet in dit opzicht dus nog aangevuld worden door invoering van een inwendige weerstandskracht, waarbij dus weer ten deele van het begrip ideale vloeistof afgeweken wordt.

We zullen daarom eerst eenige beschouwingen laten volgen over den weerstand welke een waterstroom in een kanaal ondervindt. We bepalen ons hierbij tot een stationaire strooming, want we mogen de resultaten welke hiervoor gevonden zijn ook toepassen op de niet stationaire getijstroomen. Blijkens de metingen is n.l. in onze wateren de versnelling van den getijstroom nooit zoo groot dat hierdoor, wat de weerstand betreft een merkbaar verschil bestaat met een stationairen stroom.

We beginnen met den weerstand welke een laminaire stroom ondervindt. Hoewel we in ons geval nooit met een laminaire strooming te maken hebben, kunnen we, uitgaande van dit betrekkelijk eenvoudige stroomingsverschijnsel de turbulente strooming beter begrijpen. In een laminaire strooming zijn de waterdeeltjes geordend in lagen welke zich op gelijkmatige wijze voortbewegen. Bij een stroom door een kanaal met oneindige breedte zijn deze lagen dan evenwijdig aan den bodem. We stappen nu af van het begrip ideale vloeistof, dat wil zeggen, we kennen de waterdeeltjes het vermogen toe, behalve drukkrachten ook wrijvingskrachten op te nemen.

Ondersteld wordt nu dat de wrijvingskracht onafhankelijk is van de vloeistofdruk en evenredig met de snelheidsgradient normaal op de stroomrichting, d.w.z. met het differentiaal-

Fig. 3. quotient $\frac{\partial v}{\partial y}$ (fig.3).

De "schuifspanning" bedraagt dan $\tau = \alpha \frac{\partial v}{\partial y}$.

Ook de bodemweerstand wordt evenredig verondersteld met de snelheidsgradient $\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=o}$.

Deze veronderstelling houdt in dat twee deeltjes niet langs elkaar glijden, daar anders de snelheidsgradient en dus ook de "schuifspanning" oneindig groot zou zijn. Om dezelfde reden kan dan ook geen glijding van waterdeeltjes langs den bodem plaats vinden.

Beschouwen we nu in een laminairen stroom een waterschijf

Fig. 4. met een breedte b en een dikte Δ x (fig.4). Is i het verhang van den waterspiegel ter plaatse van deze schijf, dan moet in een doorsnede A op een diepte y onder den waterspiegel een "schuifspanning" heerschen welke gelijk is aan de verhangkracht $\rho . g . i \Delta x . y . b.$, welke werkt op het gedeelte van de schijf boven A. Volgens de veronderstelling is de inwendige weerstand evenredig met de snelheidsgradient $\frac{\partial v}{\partial y}$ ter plaatse zoodat we kunnen schrijven:

$$\frac{\partial v}{\partial y} . b . \Delta x = \rho g . i . b . y . \Delta x.$$

We vinden dan een parabolisch verloop van de snelheid tusschen bodem en oppervlak n.l. een parabool van den 2en graad, met een horizontale as en den top aan de oppervlakte (W = 0). Het verloop van stroomsnelheid en weerstand is voorgesteld
Fig. 5. in fig. 5.

In het algemeen noemen we het verloop van de stroomsnelheid langs een vertikaal tusschen bodem en oppervlakte de snelheidsverdeeling in de vertikaal.

Bij een zeer geringe stroomsnelheid (3 cm/sec.) zou in een kanaal nog wel een laminaire strooming kunnen optreden. Is de snelheid echter grooter, wat welhaast steeds het geval is, dan treedt het verschijnsel op dat we turbulentie noemen. De waterdeeltjes stroomen dan niet meer regelmatig in aan elkander evenwijdige lagen, maar volgens zeer gecompliceerde wegen. Zij worden als het ware dooreengeroerd, zoodat zij behalve in de algemeene stroomrichting welke zich naar het verhang richt, ook voortdurend bewegingen in andere richtingen maken, waardoor extra energie verbruikt wordt.

Turbulente strooming kan ontstaan doordat de waterdeeltjes onderling wrijvingskrachten kunnen opnemen en van den bodem ondervinden, maar aan den anderen kant is de turbulentie geringer naarmate de taaiheid of viscositeit van de vloeistof grooter is. Wat dus de turbulentie mogelijk maakt, werkt tegelijk remmend op dit verschijnsel. Verder blijkt dat in een ruim profiel bij een geringere stroomsnelheid de turbulentie vollediger tot ontwikkeling kan komen dan in een nauw profiel en hoewel dus aan de eene kant de turbulentie een oorsprong vindt in de wandwrijving, wordt zij door de geleidende werking der wanden tevens beperkt.

We vragen nu naar de snelheidsverdeeling in de vertikaal wanneer de strooming turbulent is. Beschouwt men de stroomsnelheid in een bepaald punt, dan zal deze een onregelmatige schommeling vertoonen, veroorzaakt door de voortdurende dooreenroering van het water. Deze schommelingen hebben echter een relatief groote frequentie, zoodat het mogelijk is hen reeds over zeer korte intervallen door een gemiddelden, bin-
Fig. 6. nen dat interval konstanten stroom te benaderen (fig. 6). Construeert men nu voor een dergelijk interval het verloop van deze plaatselijk gemiddelde stroomsnelheid in de vertikaal, dan zal men over het algemeen ook hierbij een grilligen vorm
Fig. 7. vinden, ongeveer als in fig. 7 voorgesteld is. Uit veelvuldige metingen is nu gebleken dat men het verloop van de stroomsnelheid in de vertikaal in onze wateren tamelijk goed kan benaderen door een parabool met vertikale as, van de 5e tot 7e orde. (Theoretisch kan deze parabool niet afgeleid worden, hetgeen men direct ziet wanneer men bedenkt dat de raaklijn

aan de parabool aan de wateroppervlakte vertikaal gericht moet zijn, daar hier W = 0). De stroomsnelheid nadert nu bij den bodem niet tot nul, zooals we bij het geval van laminaire strooming veronderstelden, maar tot een zekere grenswaarde, welke bodemstroomsnelheid genoemd wordt.

Welken weerstand ondervindt nu een waterschijf met een dikte Δ x en een hoogte h (fig. 8) zooals we hierboven beschouwden, bij een turbulente strooming? Denkt men zich den stroom in evenwijdige lagen onderverdeeld, dan zullen deze lagen doordat voortdurend een onderlinge uitwisseling van deeltjes plaats heeft een grooteren weerstand op elkaar uitoefenen, dan wanneer ze zuiver laminair zouden stroomen. De weerstand in een doorsnede A op een diepte y beneden den waterspiegel is weer gelijk aan de verhangkracht welke op het boven A gelegen schijfgedeelte werkt (fig. 4). Doordat nu bij een turbulente strooming de weerstand tusschen twee lagen naar verhouding grooter is dan in een laminairen stroom, treedt in een turbulenten stroom een relatief kleiner snelheidsverval op. De stroomsnelheidskromme zal derhalve tengevolge van de turbulentie een steileren vorm gaan aannemen. In fig. 8 is het verloop van de stroomsnelheid in de vertikaal geschetst voor een geval van turbulente strooming terwijl daarnaast ter vergelijking het verloop aangegeven is zooals het bij een weerstandswet volgens een laminaire strooming zou zijn (streeplijn). Men ziet hieruit gemakkelijk dat door het optreden van turbulentie de stroomsnelheid vermindert.

Fig. 8.

Fig. 4.

Wanneer men bij de berekening van de doorstroomhoeveelheid, d.i. de hoeveelheid water welke over een bepaalden tijd door een bepaalde doorsnede stroomt, uit wilde gaan van een weerstandsverdeeling zooals deze in fig. 8 geschetst is, dan zou men de beweging van de waterdeeltjes in die doorsnede laag voor laag moeten berekenen, telkens uitgaande van een andere inwendige <u>weerstandskracht</u>. De doorstroomhoeveelheid Q zou men dan door integratie moeten bepalen, n.l. $Q = \int_y^0 v_y . b . dy$. Dan moet echter het verband tusschen bodemstroomsnelheid en bodemweerstand, benevens het verband tusschen snelheidsgradient en inwendigen weerstand bekend zijn. Men vereenvoudigt nu dit probleem door een gemiddelde stroomsnelheid in te voeren. Onder de gemiddelde stroomsnelheid in een doorsnede F verstaat men dan de snelheid welke, vermenigvuldigd met deze doorsnede, de totale doorstroomingshoeveelheid Q oplevert, dus $v_g . F = Q = \int_y^0 v_y . b . dy$. Men rekent dus alsof in ieder punt van de doorsnede dezelfde snelheid heerscht namelijk v_g. Verder neemt men aan dat de weerstand gelijkmatig over de geheele doorsnede verdeeld is. Daar de totale weerstand welke in een doorsnede werkt gelijk moet zijn aan den bodemweerstand per lengte-eenheid W_b ter plaatse, wordt dan de inwendige weerstand per eenheid van doorsnede W_g gevonden door W_b door de doorsnede F te deelen, dus

$$W_g = \frac{W_b}{F}$$

We veronderstellen dus een constant snelheids- en weerstandsverloop (fig. 9). Dit geval is volkomen fictief. Door het invoeren van een inwendigen weerstand wordt dus wel gedeeltelijk afgestapt van het begrip ideale vloeistof, maar door invoering van een over het profiel constante stroomsnelheid wordt dit begrip toch ten deele behouden.

Fig. 9.

Hoe bepaalt men nu de waarde van den gelijkmatig verdeeld gedachten weerstand zoodanig dat de uitkomst van de berekeningen de praktijk voldoende benadert? We stellen den totalen weerstand in een profiel evenredig aan het kwadraat van de gemiddelde stroomsnelheid in deze doorsnede en drukken haar uit door de formule:

$$W = \varsigma g \frac{v^2 b}{C^2}$$

waarin b de bodembreedte van de doorsnede voorstelt en C de z.g. constante van Eijtelwein. +)

De weerstand langs de zijwanden wordt bij benedenrivieren en zeearmen niet in rekening gebracht; de breedte van het profiel is praktisch steeds zoo groot dat deze te verwaarloozen is. Bij een stationairen stroom moet W gelijk zijn aan de totale verhangkracht per lengte-eenheid welke op een profiel werkt, dus gelijk aan ς.g.b.h.i. We vinden derhalve

$$\varsigma .g.b.h.i. = \varsigma .g.\frac{v^2 b}{C^2}$$

of $v = C\sqrt{h.i}$. We herkennen hier de bekende formule van de Chézy. Hoewel onder andere Manning en Strickler eenigszins gewijzigde formules propageerden is in de praktijk gebleken, dat bij de getijberekeningen een voldoende benadering van de

----

+) De constante van Eijtelwein is eigenlijk geen constante. Als maat voor den inwendigen weerstand, welke vooral door de turbulentie veroorzaakt wordt is haar waarde afhankelijk van dezelfde factoren die de werveling in het water beinvloeden. Zoo zal de constante in het algemeen met de diepte toenemen en eveneens met de ruwheid van den bodem. Verder wordt zij ook bepaald door s.g. verschillen in het water (brakwater), waardoor de turbulentie tegengegaan wordt. Zij moet empirisch bepaald worden en kan in het voor getijberekeningen in aanmerking komende gebied schommelen tusschen ca. 45 en 70 $m^{\frac{1}{2}}$/sec. Een C van 70 is zeer hoog en wordt alleen gevonden in den Nieuwen Waterweg. In de meeste gevallen zal de constante van Eijtelwein om de waarde 50 schommelen.

werkelijkheid verkregen wordt, wanneer men de formule van de Chézy gebruikt. Voor den weerstand welke een waterdeeltje ondervindt schrijven we dus $W = -\int \frac{g|v|v.}{C^2 h}$ Het minteeken duidt aan dat de weerstand steeds de tegengestelde richting van den stroom heeft. Door de modulusstrepen wordt gezorgd dat bij negatieve stroomsnelheid de weerstand positief genomen wordt.

We zullen thans de differentiaalvergelijkingen voor de getijbeweging afleiden zooals deze bij de getijberekeningen gebruikt worden.

a. De bewegingsvergelijking.

We vragen naar het verband tusschen de versnelling welke een waterdeeltje in de richting van de geulas, n.l. de X-richting ondervindt en de krachten, die op dit deeltje werken. Deze versnelling a is volgens definitie gelijk aan $\frac{dv}{dt}$, hetgeen een volledige differentiaal is, welke de totale verandering van de snelheid weergeeft. Nu is in ons geval v afhankelijk van x en t, zoodat we schrijven kunnen:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}.\ \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t}.\ \frac{dt}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}.\ v + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

De eerste term duidt de versnelling aan welke het deeltje ondervindt tengevolge van zijn verplaatsing naar een gebied waar een andere snelheid heerscht. We kunnen haar ook schrijven in den vorm: $\frac{\partial \frac{1}{2}v^2}{\partial x}$, zoodat de kracht welke met deze versnelling correspondeert is:

$$K = m.\ \frac{\partial \frac{1}{2}v^2}{\partial x}.$$

Men noemt deze kracht de kracht van Bernouilli en zij geeft aan de gradient van de hoeveelheid van beweging in de X-richting. "Bernouilli" is zoo gericht, dat zij het water van de plaats met grootere snelheid stuwt naar de plaats met kleinere snelheid, zooals in fig. 10 aangegeven is. **Fig. 10.**

In de praktijk blijkt dat in het gebied van onze zeearmen en benedenrivieren het snelheidsverval in de stroomrichting steeds gering is ten opzichte van de andere factoren welke in rekening gebracht moeten worden. Lorentz verwaarloosde de kracht van Bernouilli dan ook geheel (Verslag Staatscommissie Zuiderzee), en ook Dronkers liet bij zijn eerste toepassingen van de exacte methode op de benedenrivieren deze kracht buiten beschouwing (zie zijn "Een getijberekening voor benedenrivieren" in de Ingenieur no. 34, 1935). Deze verwaarloozing wordt gemotiveerd door metingen in de natuur. Zoo bedroeg volgens Dronkers (zie bovenaangehaald artikel) tijdens de stroommetingen welke op den Nieuwen Waterweg verricht werden de Bernouilli-kracht minder dan 10% van de optredende verhangkracht, terwijl dit door hem als het ongunstigste geval op de benedenrivieren beschouwd werd.

Het weglaten van de geheele Bernouillikracht komt hierop neer, dat wij bij het bepalen van de versnelling van een waterdeeltje dit deeltje niet op zijn baan volgen, maar ons voorstellen dat het voor een ondeelbaar oogenblik op dezelfde plaats blijft. We vragen dan naar de versnelling die het deeltje in dit fictieve geval krijgen zou. De verandering van de kinetische energie van het waterdeeltje speelt dus geen rol meer.

Mazure, welke een getijberekening voor benedenrivieren ontwikkelde (De berekening van getijden en stormvloeden op benedenrivieren. Diss. 1937), verwaarloost de kracht van Bernouilli slechts gedeeltelijk. Hij ontleedt haar langs mathematischen weg in een gedeelte dat hij wil behouden daar het van de tweede orde van grootte is t.o.v. de hoofdtermen en een rest welke volgens hem verwaarloosd kan worden, daar deze hoogstens van de derde orde is. In zijn bewegingsvergelijkingen 54 en 55 op blz. 98 van zijn proefschrift komt derhalve een gedeelte van de kracht van Bernouilli voor, n.l. in term 5 van verg. 54 en de termen 1b en 3a van verg. 55. Door zijn mathematische behandeling van het vraagstuk worden zijn bewegingsvergelijkingen weinig overzichtelijk.

Ook Dronkers brengt tegenwoordig bij de meer nauwkeurige berekeningen volgens de exacte methode de kracht van Bernouilli in rekening.

De tweede term geeft de versnelling aan, welke een waterdeeltje ondervindt tengevolge van de snelheidsverandering in den tijd, en wordt, zooals reeds opgemerkt werd, voorgesteld door de partieele differentiaalquotient $\frac{\partial v}{\partial t}$.

Hoewel beide termen samen de versnelling van een waterdeeltje aangeven, dus $a = v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}$,

is het gebruikelijk om alleen den tweeden term, dus $\frac{\partial v}{\partial t}$, versnellingsterm te noemen, terwijl de term $v\frac{\partial v}{\partial x}$ aangeduid wordt als "kracht" van Bernouilli.

De versnelling van een waterdeeltje moet nu evenwicht maken met de op het deeltje werkende krachten. Van de mogelijk optredende krachten willen we in het navolgende alleen de zwaartekracht en de weerstandskracht beschouwen. (De windkracht b.v. wordt dus niet in aanmerking genomen, terwijl de kracht van Coriolis en de centrifugaalkracht bij ons tweedimensionale probleem vanzelf buiten beschouwing blijven). Deze krachten moeten nu in de bewegingsvergelijking van het waterdeeltje ingevoerd worden. Voor de zwaartekracht is dit niet moeilijk; zij heeft alleen effect als het wateroppervlak boven het beschouwde deeltje onder een helling staat ten opzichte van het aequipotentiaalvlak van de zwaartekracht. We nemen hierbij eerst aan dat de bodem van het kanaal horizontaal is.

Fig. 11. Men ziet gemakkelijk uit fig. 11 dat de kracht welke door de zwaartekracht op een massadeeltje uitgeoefend wordt bedraagt:

$$-\rho g \cdot \frac{\partial h}{\partial x},$$

waarin g = versnelling van de zwaartekracht

h = waterdiepte

ρ = dichtheid van het water.

Verder zagen we (blz. ~~12~~ 14) dat de totale weerstand welke in een profiel ondervonden wordt het beste uitgedrukt kan worden door de formule

$$W = - b\, \frac{\rho g |v| v}{C^2}$$

waarin b de bodembreedte van de stroomvoerende geul voorstelt, v de gemiddelde stroomsnelheid in het beschouwde profiel en C de constante van Eijtelwein. Daar we den weerstand gelijkmatig verdeeld denken over de doorsnede, ondervindt dus ieder waterdeeltje in het profiel een weerstandskracht per volume-eenheid groot:

$$-\frac{\rho g |v| v}{C^2 h}$$

wanneer we de doorsnede F = b.h stellen.

Zoover gekomen kunnen we de bewegingsvergelijking voor een waterdeeltje opstellen. Zij luidt blijkbaar, volgens K = m.a:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\rho g |v| v}{C^2 h} - \rho v \frac{\partial v}{\partial x}. \qquad 1.$$

b. De continuïteitsvergelijking.

In deze vergelijking wordt de onsamendrukbaarheid van het water tot uitdrukking gebracht. Zij geeft aan dat de veranderingen van het watervolume in een kanaalgedeelte bepaald worden door het verschil in waterhoeveelheid welke door de begrenzende doorsneden in- of uitstroomt. Stel (fig. 12), dat in een

Fig. 12. tijd Δt bij A Δs in en bij B s + Δs uitstroomt. In den tijd Δt vermindert dan het volume in het kanaalgedeelte A-B dus met de hoeveelheid Δs. Het vrije oppervlak van dat gedeelte bedraagt B.Δx, waarin B de breedte van den waterspiegel voorstelt, zoodat door de volumevermindering Δs een daling van den waterspiegel $\frac{\Delta s}{B \Delta x}$ waargenomen wordt. Duiden we een daling van den waterspiegel door het negative teeken aan, dan is dus:

$$\Delta h = - \frac{\Delta s}{B \Delta x}$$

in den tijd Δt. Gaan we nu tot de differentiaal over, dan vinden we:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial s}{B \partial x} \quad \text{of}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = - B \frac{\partial h}{\partial t} \qquad 2.$$

Hetgeen de vorm is van de continuïteitsvergelijking voor ons probleem.

In de hiervoren gegeven vormen kunnen we echter de bewegings- en continuïteitsvergelijking niet samen gebruiken. We zien n.l. dat terwijl de bewegingsvergelijking betrekking heeft op de eenheid van massa, waarbij de gemiddelde stroomsnelheid v gebruikt wordt, voor de continuïteitsvergelijking van den stroom s uitgegaan wordt. Een van beide vergelijkingen moet dus nog herleid worden. Het overzichtelijkste is nu, om de bewegingsvergelijking om te vormen en de continuïteitsvergelijking in den vorenstaanden vorm te handhaven.

Men betrekt eerst de bewegingsvergelijking op de geheele doorsnede, hetgeen geschiedt door de vergelijking 1 met b.h te vermenigvuldigen. De krachten zijn dan gesommeerd over het geheele profiel. Men kan dan de grootheid s invoeren door te substitueeren $v = \frac{s}{b.h}$.

Tenslotte vindt men na deeling door b.h de volledige bewegingsvergelijking voor een massadeeltje, uitgedrukt in den stroom s, n.l.

$$\underbrace{\frac{\rho}{b\,h}\frac{\partial s}{\partial t}}_{1} - \underbrace{\frac{s\rho}{b\,h^2}\frac{\partial h}{\partial t}}_{2} = -\underbrace{\rho g\frac{\partial h}{\partial x}}_{3} - \underbrace{\frac{\rho g|s|s}{C^2\,b^2\,h^3}}_{4} \cancel{+} -$$

$$\underbrace{\rho\frac{s}{b^2h^2}\frac{\partial s}{\partial x}}_{5a} + \underbrace{\frac{+\rho s^2}{b^2\,h^3}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}}_{5b} + \underbrace{\frac{\rho s^2}{b^3h^2}\cdot\frac{\partial b}{\partial x}}_{5c}. \qquad 3.$$

In deze bewegingsvergelijking worden genoemd:

term 1: versnellingsterm.
term 2: correctie op de versnellingsterm.
term 3: verhangterm.
term 4: weerstandsterm.
termen 5a, 5b en 5c: Bernouillitermen.

Om deze vergelijking bruikbaar te maken voor berekeningen wordt zij nog vereenvoudigd. Afhankelijk van de methode welke bij een getijberekening gevolgd wordt, is deze wijziging dan min of meer ingrijpend. Men onderscheidt in hoofdzaak drie verschillende methoden, n.l.

A. Methode Lorentz.
B. Methode Dronkers.
C. Methode Mazure.

Overeenkomstig deze methoden worden bij de getijberekening de bewegingsvergelijkingen op drie verschillende wijzen benaderd, welke hieronder in het kort behandeld zullen worden.

A. Bewegingsvergelijking Lorentz.

Deze heeft den eenvoudigsten vorm. In de eerste plaats verwaarloost Lorentz de kracht van Bernouilli geheel, zoodat de termen 5a, 5b en 5c van vergelijking 3 wegvallen. Verder voert hij inplaats van den z.g. quadratischen weerstandsterm 4 den lineairen weerstandsterm $W = -\frac{1}{bh}ks$ in, waarin k een constante voorstelt (hierop wordt later, blz.44 e.v. nog terug gekomen). Vermenigvuldigt men de aldus gewijzigde vergelijking met den factor bh dan vindt men:

$$\underset{1'}{\rho\frac{\partial s}{\partial t}} - \underset{2'}{\rho\frac{s}{h}\frac{\partial h}{\partial t}} = - \underset{3'}{b.g.\rho.h\frac{\partial h}{\partial x}} - \underset{4'}{\rho.k.s}$$

waarbij dus thans de bewegingsvergelijking niet meer op een massadeeltje maar op de geheele doorsnede betrokken is.

Omdat nu verder de methode Lorentz toegepast wordt voor gebieden waar de waterdiepte over het algemeen groot is ten opzichte van de getijamplitude, verwaarloost Lorentz de verandering van de waterdiepte ten gevolge van de schommeling van den waterspiegel, d.w.z. hij stelt voor een bepaald profiel de diepte constant = H. Voor H kiest hij dan de diepte in den middenstand. (Het spreekt echter vanzelf dat hij in de continuïteitsvergelijking wel met de veranderlijkheid van den waterspiegel rekening moet houden.)

Door deze wijzigingen vervalt dan term 2' in vergelijking 4, terwijl in term 3' de variabele h vóór den factor $\frac{\partial h}{\partial x}$ door den constanten factor H vervangen wordt. Om ons van de beteekenis van deze vereenvoudiging een voorstelling te maken denken we ons (fig. 13) de waterdiepte h gesplitst in de grootheden H en η, waarbij dan η de verheffing of verlaging van den waterspiegel boven het middenstandsvlak beteekent.

Fig. 13.

Voor de termen 2' en 3' in vergelijking 4 kunnen we dan schrijven:

$$\frac{\rho s}{\rho h}\cdot\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{s}{H+\eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad 2'.$$

$$b.g.h.\frac{\partial h}{\partial x} = \underbrace{b.g.H\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{1} + \underbrace{b.g.\eta\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{2} \qquad 3'.$$

Term 2' stelt voor de versnelling, resp. vertraging welke de stroom ondervindt door het kleiner of grooter worden van het doorstroomingsprofiel ten gevolge van de vertikale waterbeweging. Deze term mag men wegens haar geringen invloed zoowel in zeearmen als benedenrivieren verwaarloozen. Dit wordt door Lorentz (en aanvankelijk ook door Dronkers) gedaan. Een motiveering hiervan, gedeeltelijk op grond van in de natuur verrichte metingen vindt men in het meer aangehaalde artikel van Dronkers in de Ingenieur. (blz. 182, eerste kolom).

Term 3' stelt, wanneer zij met ρ vermenigvuldigd wordt, de som voor van de verhangkrachten K_1 en K_2 in fig. 14, welke optreden tengevolge van de zwaartekracht. De kracht K_1, dus de term $b.g.\rho.\frac{\partial \eta}{\partial x}.\eta$, wordt door Lorentz geheel verwaarloosd, hetgeen voor zeearmen, waar de diepte groot genoeg is in verhouding tot het optredende getijverschil, geoorloofd is. Op

Fig. 14.

benedenrivieren, met hun geringere diepte mag deze term echter niet weggelaten worden.

Bij volledige verwaarloozing van de termen 2' en $3'_2$ krijgt de bewegingsvergelijking na deeling door ρ den vorm:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = - b.g.H.\frac{\partial \eta}{\partial x} - k.s \qquad 5.$$

De waterdiepte denkt men zich hierbij in een doorsnede onveranderlijk. Deze veronderstelling is dus feitelijk in strijd met de continuïteitsvergelijking, waar vanzelf wel met de verandering van de waterdiepte rekening wordt gehouden. Vergelijking 5 mag alleen voor diepe zeearmen toegepast worden en werd o.a. bij de berekeningen van de Staatscommissie Lorentz gebruikt. Zooals reeds opgemerkt werd is bij deze afleiding verondersteld dat de bodem van het kanaal horizontaal is.

B. Bewegingsvergelijking van Dronkers.

Dronkers verwaarloost veel minder dan Lorentz. Hij wil de getijbeweging dichter benaderen, daar zijn methode bruikbaar moet zijn voor benedenrivieren waar de diepte vaak veel geringer is dan in zeearmen, terwijl hij wil rekenen met werkelijk gemeten getijlijnen en deze niet zooals Lorentz, benadert door een sinusoide. Van de termen welke in vergelijking 3 voorkomen laat hij alleen 5b en 5c wegvallen. Hij behoudt dus de kracht van Bernouilli voor het overgroote deel in zijn vergelijking. De term 5b, bedraagt volgens meetgegevens maximaal ongeveer 2% van den factor $\rho.g\frac{\partial h}{\partial x}$ en haar invloed is dus inderdaad zeer gering. Wat term 5c betreft wordt opgemerkt dat door de schematisatie van de stroomvoerende geulen met vakken van constante breedte gerekend wordt. De factor $\frac{\partial b}{\partial x}$ wordt dan nul.

Doordat zijn bewegingsvergelijking toegepast moet kunnen worden op benedenrivieren, moet Dronkers verder de helling van den rivierbodem in rekening brengen. In term 3 van de verg. 3 op blz. 17 moet de grootheid $\frac{\partial h}{\partial x}$ ten opzichte van een horizontaal vlak genomen worden hetgeen alleen het geval is, als de bodem horizontaal verloopt. Bestaat er nu een bodemhelling dan moet h in genoemden term vervangen worden door een grootheid z, welke voorstelt de hoogte van den waterspiegel boven een horizontaalvlak, b.v. het N.A.P.vlak (fig. 15.). Fig. 15.

Voor den term 3 uit vergelijking 3 wordt dus nu geschreven

$$\frac{\partial z}{\partial x}.\rho g.$$

Een verdere verandering ondergaat de vergelijking doordat de termen 2 en 5a samengevoegd worden. Daar volgens de continuïteitsvergelijking 2 $\frac{\partial s}{\partial x} = - B\frac{\partial h}{\partial t}$

kan men voor term 5a schrijven:

$$\frac{\rho s}{b^2\,h^2} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial t}\,\frac{\rho\, sB}{b^2\,h^2} \qquad 5a'$$

en voor den term 2:

$$\frac{\partial h}{\partial t}\,\frac{\rho s}{b \cdot h^2} = \frac{\partial h}{\partial t}\,\frac{\rho s\, b}{b^2\,h^2} \qquad 2'$$

door samenvoeging van 2' en 5a' krijgt men dan den term:

$$\frac{\rho s\,(B+b)}{b^2\,h^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

Wat de teekens betreft kiest Dronkers voorts de X-as rivieropwaarts, maar tevens den ebstroom positief, zooals in

Fig. 16. fig. 16 voorgesteld is. Volgens deze bepaling wordt dan de term in het rechterlid van de continuïteitsvergelijking 2 positief en deze vergelijking luidt dan:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = B \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \qquad 2'.$$

Verder veranderen hierdoor de termen 1, 2, 4 en 5a in vergelijking 3 van teeken en vindt Dronkers voor zijn bewegingsvergelijking na deeling door ρ.g den vorm:

$$\underset{a}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \underset{b}{\frac{1}{b\,g\,h}\,\frac{\partial s}{\partial t}} \pm \underset{c}{\frac{s^2}{C^2\,b^2\,h^3}} - \underset{d}{\frac{(B+b)}{g\,b^2\,h^2}\,s \cdot \frac{\partial h}{\partial t}} \qquad 6.$$

Dit is geen lineaire vergelijking zooals 5. Behalve differentiaalquotienten van de 1e orde komen n.l. in 6 nog de onbekende functies h (x,t) en s (x,t) als coëfficienten voor, terwijl ook de weerstandsterm niet lineair is. Zooals we later zullen zien (hoofdstuk 6) wordt daarom, wanneer uitgegaan wordt van vergelijking 6, een andere berekeningsmethode gevolgd dan wanneer uitgegaan wordt van vergelijking 5.

C. Bewegingsvergelijkingen van Mazure.

Ofschoon de vorm welke Mazure aan zijn bewegingsvergelijkingen geeft (vergelijkingen 54 en 55 op blz. 98 van zijn aangehaalde proefschrift) gecompliceerder lijkt dan vergelijking 6, voeren deze vergelijkingen toch tot een eenvoudiger rekenmethode, daar zij alleen constante en lineaire termen bevatten. Mazure's vergelijkingen komen dus eerder overeen met vergelijking 5, doch zijn zij, in tegenstelling met deze laatste, geschikt voor de berekening van de getijbeweging op benedenrivieren, waar behalve met een getijstroom ook met opperwaterafvoer gerekend moet worden. Daar hij, evenals Lorentz, genoegen neemt met een benadering van het getij door een sinusoidalen bewegingsvorm met de frequentie van het M2 getij, kan hij voor de onbekende variabelen η en σ (getijstroom) cosinusfuncties substitueeren van den vorm:

$\eta = \eta_0 \cos(nt-k)$ en $\sigma = \sigma_0 \cos(nt-\varphi)$, waarinnde frequentie van het M2 getij voorstelt. Hij krijgt dan een vergelijking waarin behalve cosinustermen met de frequentie n ook constante termen en termen met hoogere frequenties (veelvouden van n) voorkomen.

In groote trekken komt Mazure's afleiding dan hierop neer, dat hij, naast de toepassing van enkele kleinere verwaarloozingen, alle termen van de bewegingsvergelijking splitst in een constant gedeelte, een deel met de frequentie van het M2 getij en een aantal termen met hoogere frequentie, en dan alleen de termen met hoogere frequentie verwaarloost. Hij komt zoo tot een betrekkelijk groot aantal termen. Zijn splitsingsmethode leidt er toe, dat geen enkele der termen van de oorspronkelijke bewegingsvergelijking geheel verwaarloosd wordt. In zijn vergelijkingen 54 en 55 komen dan ook nog gedeelten van de kracht van Bernouilli te voorschijn (term 3 in 54, 1b en 3a in 55) terwijl ook de invloed, welke de diepteverandering tengevolge van de vertikale waterbeweging op de versnelling van den stroom heeft niet geheel uitgeschakeld is (term 3b in 55). Op de termen 1 en 2 in 54 en 4ab in 55, welke betrekking hebben op den weerstand wordt teruggekomen op blz. 46 . Verder merken we op dat Mazure het z.g. middenstandsverhang i_m invoert. Hieronder verstaat hij klaarblijkelijk niet de helling, die het wateroppervlak op een bepaalde plaats aanneemt wanneer daar de middenstand bereikt is, doch de over een getijperiode gemiddelde helling daar ter plaatse. Zoodoende kan hij de bewegingsvergelijking splitsen in een vergelijking met constante termen, waaruit het middenstandsverhang bepaald wordt (verg. 54), en een lineaire vergelijking (verg. 55).

Wat de teekenbepaling betreft noemt Mazure evenals Dronkers, den ebstroom positief. In afwijking met Dronkers trekt hij echter de positieve X-as stroomafwaarts, zooals in
Fig. 17. fig. 17 is voorgesteld. Tenslotte wordt er nog op gewezen dat Mazure van een trapeziumvormig dwarsprofiel uitgaat, inplaats, zooals Lorentz en Dronkers, van een rechthoekig. Hij onderscheidt daarom de stroomvoerende breedte b in den bodem van de stroomvoerende breedte b_W aan de oppervlakte. Deze laatste is dan natuurlijk weer te onderscheiden van de kombergende breedte B.

Zijn methode leidde weliswaar tot het beoogde doel, doch zij is weinig overzichtelijk. Bovendien is bij deze mathematische afleiding niet voldoende aan de praktijk getoetst in hoeverre de termen met hoogere frequentie dan het M_2 getij, welke door hem verwaarloosd worden, van belang kunnen zijn.

We hebben in het vorenstaande de gebruikelijke differentiaalvergelijkingen voor de getijbeweging afgeleid. De continuïteitsvergelijking brengt de onsamendrukbaarheid van het water tot uitdrukking, terwijl de bewegingsvergelijking het verband vastlegt tusschen de versnelling van het water en de krachten die er op werken. Als partieele differentiaalvergelijkingen drukken zij eenerzijds het verband uit dat er bestaat tusschen stroom en waterhoogte op verschillende plaatsen($\frac{\partial h}{\partial x}$ en $\frac{\partial s}{\partial x}$), terwijl zij tevens voor iedere plaats het verloop van stroom en waterhoogte in den tijd aangeven ($\frac{\partial h}{\partial t}$ en $\frac{\partial s}{\partial t}$). Zij leggen de wetten vast, waaraan we ons een tweedimensionale waterbeweging gebonden denken. Al naarmate we het probleem meer of minder vereenvoudigen wordt de waterbeweging dus meer of minder beperkt in haar vorm. Dit komt tot uiting in de bewegingsvergelijking, die eenvoudiger van vorm wordt naarmate we meer invloeden verwaarloozen. De continuïteitsvergelijking behoudt steeds haar vorm (2 of 2').

Afhankelijk van het gebied waarvoor men berekeningen wil uitvoeren, en van de praktische eischen welke aan het resultaat gesteld worden, mag de vereenvoudiging van de bewegingsvergelijking grooter of kleiner zijn.

Het eenvoudigst wordt haar vorm voor diepe zeearmen. De diepte is dan groot genoeg in verhouding tot het vertikale getij om haar verandering tengevolge van de vertikale waterbeweging te mogen verwaarloozen.
Verder zijn de stroomvoerende geulen in deze gebieden meestal niet zoo uitgebreid dat de kracht van Coriolis een rol van beteekenis zou kunnen gaan spelen, en voorts geven de banken en oevers hier nog wel zooveel geleiding aan den stroom dat het probleem wat de stroomrichting betreft als eendimensionaal beschouwd mag worden. Voor dit geval vonden wij de vergelijking 5.

Komt men in het gebied van de benedenrivieren, dan speelt de diepteverandering in het profiel een niet meer te verwaarloozen rol. Voor deze gevallen bespraken we eenerzijds de niet lineaire vergelijking 6 van Dronkers en bovendien de door Mazure voorgestelde bewegingsvergelijkingen (verg. 54 en 55, blz. 98 van zijn proefschrift).

Op zee en in de uitgestrekte riviermonden mag de kracht van Coriolis niet meer verwaarloosd worden, terwijl hier bovendien geen sprake is van een behoorlijke leiding van den stroom door banken of oevers. Hier mogen de door ons gegeven vergelijkingen dan ook niet meer toegepast worden.

Afhankelijk van de toegepaste vereenvoudigingen zal de getijbeweging welke aan de gekozen differentiaalvergelijkingen voldoet in meer of mindere mate afwijken van den in de natuur optredenden vorm, m.a.w. de werkelijke getijbeweging wordt vaak door een bewegingsvorm van meer eenvoudigen aard benaderd.

3. Profielsgrootheden.

(voor de figuren zie bijl. 4).

Bij de afleiding van de differentiaalvergelijkingen voor de getijbeweging werd verondersteld dat deze waterbeweging plaats vindt in een volkomen rechte geul met een constante "stroomvoerende" breedte en waterdiepte beneden den middenstand. Een dergelijke geul wordt gewoonlijk een kanaal genoemd. De vergelijkingen van Lorentz en Dronkers gelden voor een rechthoekig profiel, de vergelijkingen van Mazure voor een trapeziumvormige doorsnede. In de praktijk heeft men echter te maken met een stroombedding welke bestaat uit gebogen geulen met veelal sterk veranderlijke breedte en diepte. Soms liggen meerdere geulen naast elkaar, alleen gescheiden door onregelmatig gevormde platen welke meestal gedurende een gedeelte van het getij onderloopen. Voordat men kan overgaan tot de berekening van de voortplanting van een getijgolf in een dergelijk grillig gevormd stroomstelsel moet men dit dus sterk vereenvoudigen en herleiden tot een stelsel van rechte prismatische kanalen, vakken genaamd.

Men noemt dit de schematisatie van het beschouwde geulenstel-
Fig. 18. sel. Fig. 18 geeft hiervan een voorbeeld. In ieder vak zijn de volgende grootheden te onderscheiden:

1. Vaklengte.
2. Gem. waterdiepte.
3. Stroomvoerende breedte.
4. Kombergende breedte.

De vaklengte hangt, behalve van den vorm van de geul (sterk gebogen geul: korte vakken), nog af van de methode welke men bij de berekening volgt. Hierop zal later nog worden terug gekomen.

De andere grootheden waardoor het dwarsprofiel van een vak bepaald wordt noemt men de profielsgrootheden. Zij moeten zoodanig bepaald worden dat de geul wat betreft haar invloed op de getijbeweging, zoo goed mogelijk vervangen wordt. Maatgevend zijn hierbij de weerstand welke in de geul ontwikkeld wordt en de oppervlakte van haar stroomvoerend profiel, gerekend als gemiddelde over de bepaalde vaklengte.

We beschouwen nu een willekeurig profiel, voorgesteld in
Fig. 19. fig. 19 en vragen, hoe dit te vervangen is door een rechthoekig profiel, dat hetzelfde effect heeft. We verdeelen het profiel

in vakken, welker breedte zoo klein is, dat ieder vakje als rechthoek beschouwd mag worden. Gaan we verder uit van een stationairen stroom, dan vinden we volgens de Chézy in een vakje een gemiddelde stroomsnelheid $v_{gn} = C_n\sqrt{h_n i}$, waarin h_n de diepte van het vakje is en i het verhang van den waterspiegel ter plaatse van het profiel. Voert men inplaats van de gemiddelde snelheid den stroom in, welke door het vakje gaat, dus $s = v_{gn} \cdot h_n \cdot b_n$, waarin b_n de breedte van het vakje is, dan vinden we voor een vakje: $s = C_n \cdot b_n \cdot h_n^{\frac{3}{2}} \; i^{\frac{1}{2}}$. Door het geheele profiel stroomt dan $\sum C_n \cdot b_n \cdot h_n^{\frac{3}{2}} \cdot i^{\frac{1}{2}} = S$.

Wordt het profiel nu door een rechthoek vervangen met de breedte b en de diepte H, dan gaat door dit profiel bij een verhang i een stroom $S' = C \cdot b \cdot H^{\frac{3}{2}} \cdot i^{\frac{1}{2}}$ Hierin moeten b en H zoo gekozen worden dat $S' = S$, en we zien dat hierbij aan de diepte een grooter gewicht moet worden toegekend dan aan de breedte en we haar niet eenvoudig gelijk mogen stellen aan de gemiddelde diepte van het geulprofiel. Men moet bij het bovenstaande bedenken dat het profiel van een geul binnen de grenzen van een vak veranderlijk is en dat dus eerst het gemiddelde geulprofiel in het beschouwde vak bepaald moet worden.

Fig. 19. Dit gemiddelde geulprofiel is nu voorgesteld in fig. 19. Zijn b en H eenmaal gekozen, dus het gemiddelde bakprofiel voor het beschouwde vak vastgesteld, dan wordt de bijbehoorende constante van Eijtelwein, C, uit metingen berekend.

Heeft men te maken met een getijbeweging, waarbij behalve een verhangkracht ook nog een versnellingskracht optreedt, dan wordt de herleiding gecompliceerder. De stationaire toestand waarbij de versnelling nul is treedt dan alleen op ten tijde van maximum stroom. Men moet dan tevens bedenken, dat door den veranderlijken waterstand ook de diepte van het profiel varieert. Een formule voor de schematisatie van het dwarsprofiel is daarom bezwaarlijk op te stellen en men gaat hierbij dan ook schattend te werk. Blijkt dan, bij de noodzakelijke bepaling van de constante van Eijtelwein uit metingen, dat deze te veel afwijkt van de in het beschouwde vak te verwachten waarde, dan kan men hieruit de gevolgtrekking maken, dat de schematisatie, dus de bepaling van b en H, niet juist was.

Heeft men de stroombedding binnen bepaalde vakgrenzen door rechthoekige of trapeziumvormige doorsneden vervangen, dan zijn de profielsgrootheden welke in de uitgangsvergelijkingen voorkomen, bekend. De beteekenis van de verschillende

Fig. 20. grootheden moge blijken uit de figuren 20a en b. Hierin is b de stroomvoerende breedte, H de gemiddelde waterdiepte (diepte in den middenstand) en h de met de vertikale getijbeweging ver-

anderlijke waterdiepte. In een trapeziumvormig profiel (Mazure) wordt verder nog verschil gemaakt tusschen de stroomvoerende breedte in den bodem b en de stroomvoerende breedte aan de oppervlakte b_W.

In de continuïteitsvergelijking verschijnt nog een andere profielsgrootheid, n.l. de kombergende breedte B, welke onderscheiden wordt van de stroomvoerende breedte. Door de kombergende breedte van een vak wordt bepaald hoeveel water in dat vak geborgen wordt wanneer de waterspiegel in dat vak stijgt. Er zal bij hoog water door het onderloopen van platen of uiterwaarden een grooter profiel worden ingenomen dan bij laagwater
Fig. 21. (fig. 21), zoodat de kombergende breedte dan grooter is dan bij laagwater. De stroom over platen of uiterwaarden mag bij de hier meestal geringe diepte bijna altijd verwaarloosd worden, zoodat het natte profiel boven deze gebieden dan niet bij het stroomvoerende profiel betrokken wordt. In fig. 21 is het stroomvoerende profiel door arceering aangegeven. De stroomvoerende breedte is dus meestal verschillend en dan steeds kleiner dan de kombergende breedte.

Afhankelijk van de bij de berekening gevolgde methode worden de profielsgrootheden op verschillende wijze in rekening gebracht.

Lorentz stelt de stroomvoerende breedte en de kombergende breedte gelijk, doch dit is niet principieel voor zijn methode, welke ook bruikbaar is voor gebieden waar deze gelijkstelling niet toelaatbaar is. Wel essentieel voor zijn rekenwijze is dat hij uitgaat van een constante diepte n.l. de diepte in den middenstand H en hij dus de diepteverandering tengevolge van de vertikale getijbeweging verwaarloost. Dit is, afhankelijk van de gestelde eischen van nauwkeurigheid, alleen toelaatbaar wanneer de diepte van de beschouwde geulen groot is ten opzichte van het optredende tijverschil.

Mazure gaat, zooals reeds opgemerkt werd, van een trapeziumvormig stroomvoerend profiel uit. De grootte van dit profiel verandert met de stijging en daling van den waterspiegel en hij brengt deze schommeling gedeeltelijk in rekening door invoering van den factor χ (zie blz. 92 van zijn proefschrift). Hij voert verder naast de stroomvoerende breedte aan de oppervlakte, de kombergende breedte B in. Beide zijn bij hem constante grootheden, d.w.z. onafhankelijk van den stand van den waterspiegel. Zoo beteekent b_W de stroomvoerende breedte aan de oppervlakte in den middenstand.

Dronkers rekent weer met een rechthoekig profiel. Hij brengt de verandering van den waterspiegel wel in rekening. Ook maakt zijn methode het mogelijk om met een veranderlijke kombergingsbreedte te rekenen.

De bepaling van de profielsgrootheden gaat zooals reeds